МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ОБРАЗОВАНИЕ НА МИКРОУРОВНЕ

Добрынина Н.Ф.

Пензенский государственный университет

Пенза, Россия

Проведение исследований в области системы высшего образования, в частности, по одному из разделов высшей математике, привело к построению математической модели, позволяющей анализировать стратегию развития образования. Остановимся на микромодели образования. В рамках этой модели анализируется процесс становления специалиста. В ней на упрощённом уровне делается попытка оценить как, за какое время и в результате каких усилий в ходе обучения и практической работы студент превращается в специалиста.

Составим простейшее математическое описание процесса получения высшего образования. Эта модель не позволит получить надёжные и достоверные количественные оценки, но она даёт качественное представление о механизмах изучаемых явлений и причинно-следственных связях.

Начнём с микроописания – описания процесса получения математического образования конкретным человеком.

Сформулируем основные предположения.

Будем рассматривать «массовое» математическое высшее образование («типичный человек в типичных обстоятельствах»).

Будем считать, что существует переменная величина x, которая характеризует степень профессиональной подготовки. «Профессиональному минимуму» для определённости сопоставим значение $x=1$. Начиная с этого момента, молодой специалист миновал стадию ученичества и готов к самостоятельной работе.

Изменение квалификации определяется временем, затраченным обществом и самим студентом. Можно сказать, что это «среднее общественно необходимое время. Изменение квалификации со временем определяется обыкновенным дифференциальным уравнением (динамической системой)

$$\dot{x} = f(x) + I(t),\; x(0) = x_0. \qquad (1)$$

В нём x характеризует квалификацию специалиста в процессе подготовки, а затем дальнейшей деятельности, t – временная переменная, x_0 - квалификация до начала обучения в ВУЗе. Функция $I(t)$ характеризует усилия, вкладываемые системой образования в подготовку специалиста.

Уточним вид функции $f(x)$. Чтобы последующие рассуждения стали более наглядными, сформулируем сначала неприемлемую и заведомо неправильную модель.

1. Модель «наполняемого сосуда». Представим себе сосуд, который наполняют жидкостью до некоторой отметки $\overline{x}$. Если считать, что подготовка в высшей школе сродни равномерному наливанию жидкости в сосуд, то в уравнении (1)

$$f(x) = 0, \quad I(t) = I_0 \ \text{при}\ 0 \le t \le T,\ \text{иначе}\ I(t) = 0, \qquad (2)$$

где T - время обучения. При этом критическая отметка $\overline{x} < I_0 T$ должна достигаться к концу обучения.

Главный недостаток этой модели – неспособность описать такое явление, как «инфляция вузовского диплома», противоречие между большим количеством закончивших ВУЗ по многим специальностям и очень небольшим числом квалифицированных специалистов в тех же областях.

2. Модель «зажигания огня».

Вернёмся к функции f. Поставим простейший эксперимент. Пусть некий студент, прослушав первые полгода, например, курс аналитической геометрии, бросает учиться. Допустим, что с определенным временным интервалом, мы контролируем его знания. Что будет происходить? Здравый смысл подсказывает, что выученное практически не применялось и не приведено в систему. Оно будет забываться. Скорость забывания зависит от способностей и индивидуальных склонностей студента.

Математическая психология и ее наиболее развитый раздел – теория обучения, утверждают, что объём знаний в этом случае будет уменьшаться по экспоненциальному закону. Классические эксперименты Г.Эбингауза показывают, что в простейшем случае объём запоминаемого материала x при $I = const$ будет зависеть от времени обучения следующим образом

$$x(t) \approx C_1 - C_2 \exp(a\,t), \tag{3}$$

где C_1 и C_2 - постоянные, a - показатель, определяющий скорость восприятия $(a < 0)$.

Исходя из этой теории, естественно считать, что на начальном этапе обучения $(x << 1)$, функция $f(x)$ - линейная:

$$f(x) = a\,x, \quad a < 0 \text{ при } x << 1. \tag{4}$$

Коэффициент a показывает насколько легко студент в начале обучения осваивает новый материал. Чем меньше значение a по абсолютной величине, тем лучше восприятие.

Посмотрим, что происходило бы, если бы вся зависимость $f(x)$ была линейной и определялась формулой (4), а усилия системы образования вкладывались бы с постоянной интенсивностью I_0. В этом случае уравнение (1), определяющее изменение уровня подготовки, запишется в виде

$$\dot{x} = a\,x + I_0, \quad x(0) = x_0, \quad 0 \le t < \infty. \tag{5}$$

Решение этого уравнения таково:

$$x(t) = -\frac{I_0}{a} + \left(x_0 + \frac{I_0}{a} \right) e^{a\,t} \tag{6}$$

Другими словами, вначале происходит довольно быстрое накопление знаний. При $t \le \frac{1}{a}$

$$x(t) \approx x_0 + x_0 a\,t + I_0 t. \tag{7}$$

Формула (7) выражает очевидный факт: чем лучше начальная подготовка (больше x_0), тем лучше восприятие (больше коэффициент a), и чем интенсивнее ведется обучение (больше величина I_0), тем быстрее растёт уровень подготовки.

При $t >> \frac{1}{a}$

$$x(t) \approx -\frac{I_0}{a}. \tag{8}$$

Из равенства (8) следует, что в упрощённой модели (5) имеет место эффект «насыщения». То есть, существует некий предельный уровень квалификации, определяемый интенсивностью обучения I_0 и восприимчивостью a, выше которого студент не поднимется, сколько бы его не учили. Поскольку это не соответствует имеющимся данным и противоречит существованию самого феномена высшего образования, следует перейти к более сложной нелинейной модели.

Будем предполагать, что получение образования и подготовка специалистов требует конечных затрат общественно необходимого времени. Естественно исходить из того, что после освоения логики профессии, фундаментальных курсов, овладения понятийным аппаратом дальнейшее получение образования облегчается. Геометрически это означает, что далее кривая $f(x)$ поворачивает вверх и пересекает ось абсцисс в точке $x=1.$ При $x<1$общество вкладывает усилия в подготовку специалиста, а при $x>1$ специалист начинает вкладывать усилия в повышение благосостояния общества. Иначе говоря, площадь под кривой $f(x)$ конечна. Пусть она равна I_1.

$$I_1=\int_0^1 \left| f(z)\right| dz<\infty. \tag{9}$$

Студент в рамках предложенной модели, характеризуется двумя параметрами – величиной, отражающей его способность усваивать материал на начальной стадии обучения и общим объёмом усилий, который нужно вложить, чтобы подготовить из него полноценного специалиста.

Можно рассмотреть несколько типичных ситуаций.

1). Кривую $f(x)$ в интервале $0\le x\le 1$ для способного студента, легко осваивающего выбранную профессию. Для него $|a|$ имеет малое значение.

2). Плохо воспринимающий студент, с которым нужно много возиться. Нужно предположить, что существует значительная корреляция между величинами a и I_1.

Переход к технологической цивилизации позволил предположить такие методы и алгоритмы обучения, при которых для среднего студента $\dot{I}_2\approx a\,\dot{I}_1$, где $a\approx 10.$

Во времена средневековья $a\approx 1,$ поэтому было возможно только простейшее профессиональное или, напротив, элитарное образование. Во время научно – технической революции величина a резко увеличивается. Информационная лавина и возможность быстрой смены технологий позволяют работать высшей школе в роли «реактора» компетентных кадров.

Рассмотрим критерий получения высшего образования. Функция $f(x)$ характеризует возможности студента (при $x\le 1$) и специалиста (при $x>1$).

Зависимость $I(t)$ характеризует действия высшей школы и общества по подготовке специалиста. Рассмотрим взаимодействие этих двух факторов.

Из модели следует, что квалификация будет расти ($\dot{x}(t)>0$) в данный момент времени, если

$$f\left(x(t)\right)+I(t)>0. \tag{10}$$

Это необходимое условие эффективного обучения. Оно должно быть выполнено в течении всего времени обучения.

Из уравнения (1) следует, что

$$dx=dt\Big(f\left(x(t)\right)+I(t)\Big).$$

Проинтегрируем его по времени обучения:

$$\int_{x_0}^{x} dx = \int_{0}^{T} dt\left(f\left(x(t)\right)+I(t)\right).$$

Если

$$1-x_0 < \int_{0}^{T} dt\left(f\left(x(t)\right)+I(t)\right), \tag{11}$$

то за время учебы $\bar{T}$ студент с начальной подготовкой x_0 и возможностями, определяемыми $f(x)$, станет специалистом.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ:

1. Капица С.П., Курдюмов С.П., Малинецкий Г.Г. Синергетика и прогнозы будущего. Москва. Изд-во УРСС. 2003. с. 285.

2. Ахромеева Т.С., Курдюмов С.П., Малинецкий Г.Г., Самарский А.А. нестационарные структуры и диффузный хаос. М.: наука, 1992.

Работа представлена на научную международную конференцию «Перспективы развития вузовской науки», "Дагомыс" (Сочи), 20-23 сентября 2008 г. Поступила в редакцию 01.10.2008.