ПРОГНОЗИРОВАНИЕ СТРУКТУРЫ ПРЕПОДАВАТЕЛЬСКОГО СОСТАВА КАФЕДРЫ

Добрынина Н.Ф.

Пензенский государственный университет

Пенза, Россия

Повышение качества математического образования в классическом университете и, в особенности, специальности «Прикладная математика» требует изучить структуру преподавательского состава и сделать ее оптимальной с точки зрения перспектив квалификации преподавателей. Построим математическую модель, основанную на теории вероятностей и статистике [1,2].

Штат преподавателей поделим на три категории: профессора, доценты, ассистенты. Центральное место среди количественных характеристик данной задачи занимают числа людей в каждом классе на данный момент времени; их мы называем запасы.

Обозначим $n_i(T) \quad (i=1,2,\mathbf{K},k)$ запас людей в классе i в момент времени T. Объёмы запасов могут меняться в любое время, однако в данном случае при изучении учебного процесса наибольшее число изменений происходит в конце академического года или в начале следующего учебного года. Поэтому допустим, что интервал между изменениями составляет один год. T выражается в годах и является целым числом.

Размеры запасов изменяются за счёт наличия потоков, направленных как в систему, так и из системы (набор и увольнение), а также за счет внутренних перемещений при переходе сотрудников в класс с более высокой квалификацией. В результате соотношение между запасами и потоками записывается следующим образом

$$n_j(T+1) = n_j(T) + n_{0j}(T+1) + \sum_{i=1}^{k} n_{ij}(T) - n_{j,k+1}(T) - \sum_{\substack{i=1\\ i\neq j}}^{k} n_{ji}(T) =$$

$$= \sum_{i=1}^{k} n_{ij}(T) + n_{0j}(T+1), \quad (j=1,2,\mathbf{K},k), \tag{1}$$

где число оставшихся в классе j сотрудников составляет

$$n_{jj}(T) = n_j(T) - \sum_{\substack{i=1\\ i\neq j}}^{k} n_{ij}(T) - n_{j,k+1}(T).$$

Потоки вызывают изменения в запасах, поэтому нужно сделать допущения относительно перемещений.

При построении математической модели прежде всего ставится цель отразить характеристики реальной системы, которую эта модель представляет. На первом этапе необходимо обратиться к данным о поведении рассматриваемой системы, чтобы изучить возможность введения оправданных допущений. Прежде чем делать научные прогнозы, нужно установить закономерности, имевшие место в прошлом, сделать дополнительные допущения о том, что эти закономерности сохранятся в будущем. Дальнейшее продвижение в решении задачи возможно после статистического исследования данных по запасам и потокам за прошлые годы.

Рассмотрим потоки, характеризующие повышение в должности. Они управляются некоторой совокупностью факторов, которые варьируются от одного вида найма к другому. Иногда количество повышений связано с числом образующихся вакансий. В других случаях повышения происходят автоматически по достижению преподавателем определённого вида квалификации. Эта возможность ближе к действительности, возьмём её за основу при установлении соотношения между потоками и запасами. Это соотношение оказывается простой пропорциональной зависимостью, поскольку отношения $n_{ij}(T) / n_i(T) \quad (i=1,2,\ldots,k)$ являются постоянными.

Будем прогнозировать размеры запасов исходя из пропорциональности между $n_{ij}(T)$ и $n_i(T)$ (числа людей, перешедших в класс j ко времени $T+1$ и запаса людей $n_i(T)$). Для кафедры высшей и прикладной математики Пензенского государственного университета отношение колеблется от 0,047 до 0, 071.

Рассмотрим модель как детерминированную. В действительности отношения $n_{ij}(T) / n_i(T) \quad (i=1,2,\ldots,k)$ могут не зависеть от T систематическим образом, тем не менее они будут меняться. Эти изменения могут быть весьма значительными при малых потоках $n_i(T)$. В нашем случае $n_i(T)$ = 42 человека и уход из системы отдельных лиц становится непредсказуемым событием. Модель должна включать в себя не только регулярные явления, наблюдаемые в коллективе, но и неопределённости поведения индивидуумов. В связи с этим воспользуемся методами теории вероятностей. Допустим, что перемещения происходят независимо и что индивидуум в классе i характеризуется вероятностью p_{ij} перехода в класс j в течение года. Пусть вероятность его ухода составляет v_i, тогда , очевидно,

$$\sum_{i=1}^{k} p_{ij} + v_i = 1 \quad (i=1,2,\ldots,k), \tag{2}$$

поскольку индивидуум должен остаться в своём классе, переместиться в другой класс или выбыть совсем. При этом допущении число лиц, переходящих из класса i в класс j за год, будет случайной величиной с биномиальным распределением при заданном начальном запасе $n_i(T)$. *Ожидаемый поток* будет равен $n_i(T)\,p_{ij}$. Это соответствует допущению эмпирического характера относительно того, что потоки пропорциональны запасам.

Рассмотрим вопрос о наборе преподавателей на кафедру. Его удобнее рассмотреть с двух позиций. Первая – общее число набираемых в систему, вторая – способ распределения этих лиц по классам. В организации, общее число сотрудников которой фиксировано, общее число вновь нанимаемых должно быть равно общему числу выбывающих, то есть должно выполняться уравнение

$$R(T+1) = \sum_{i=1}^{k} n_{i,k+1}(T). \tag{3}$$

Распределение нанимаемых лиц по классам вполне фиксировано, поскольку оно определяется потребностями организации. Допустим, что доля r_i от общего числа нанимаемых на работу в системе зарезервирована для класса $i\,(i=1,2,\ldots,k)$, причём $\sum_{i=1}^{k} r_i = 1.$

Собирая все допущения, получаем, что модель характеризуется:

1) матрицей вероятностей переходов, управляющей перемещениями в системе $P = (p_{ij})$;

2) вектором вероятностей ухода $v = (v_1, v_2, \ldots, v_k)$, связанным с p_{ij} уравнением (2);

3) вектором $\vec{r} = (r_1, r_2, \ldots, r_k)$, определяющим распределение нанимаемых по классам;

4) ограничением $\sum_{i=1}^{k} r_i = 1.$

В соответствии с моделью контингент преподавателей следующего года есть случайная величина. Поэтому значения запасов не могут быть предсказаны точно. В этих условиях используются *ожидаемые значения* случайной величины в качестве прогноза. Можно снабдить такое предсказание стандартной ошибкой, с помощью чего и задаётся статистический характер модели.

Определим математические ожидания в обеих частях уравнения (1) для запасов за год T. Известно, что

$$\bar{n}_{ij}(T) = n_i(T)\, p_{ij},$$

где черта означает математическое ожидание. Набор в класс j, $n_{0j}(T+1)$ можно записать как $R(T+1)r_j$, так что необходимо найти математическое ожидание для $R(T+1)$, имеем

$$n_{i,k+1}(T) = n_i(T)\, v_i$$

и из формулы (3)

$$\bar{R}(T+1) = \sum_{i=1}^{k} n_i(T)\, v_i.$$

Подставим всё это в формулу (1), получим

$$\bar{n}_j(T+1) = \sum_{i=1}^{k} n_i(T)\, p_{ij} + r_j \sum_{i=1}^{k} n_i(T)\, v_i, \quad (j = 1, 2, \mathbf{K}, k). \tag{4}$$

В матричной форме эти уравнения могут быть записаны в виде

$$\bar{n}(T+1) = n(T)\{p + v'r\} = n(T)Q. \tag{5}$$

Таким образом, если параметры модели известны, то запас следующего года $T+1$ может быть найден по запасу текущего года T путём простого перемножения матриц. Прогноз на следующий год $\bar{n}(T+1)$ можно использовать в качестве основания для прогноза ещё на один год вперёд, если взять

$$\bar{n}(T+2) = \bar{n}(T+1)Q. \tag{6}$$

Матрица Q относится к особому классу матриц, называемых стохастическими, и представляет все возможные переходы от одного класса к другому. Она имеет неотрицательные элементы и суммы всех элементов каждой из строк равны единице. Подобные матрицы играют основную роль в теории Марковских цепей и можно применить эту теорию для исследования поведения модели.

Первый вопрос, который был поставлен относительно структуры преподавательского состава кафедры высшей и прикладной математики, состоит в том, имеется ли тенденция к продолжению роста квалификации преподавателей в рамках системы.

Допустим, что начальные запасы и величины параметров таковы:

$$n(0) = (23;18;1) \quad n(1) = (21;20;1)$$ - запасы;

$$w = (0,05;0,02;0)$$ - вектор ухода;

$$r = (0,54;0,42;0,02)$$ - вектор распределения по квалификации;

$$P = \begin{pmatrix} 0,8782 & 0,0052 & 0 \\ 0 & 0,9871 & 0,0052 \\ 0 & 0 & 0,8834 \end{pmatrix}$$ – *матрица вероятностей переходов, управляющая перемещениями в системе.*

Вид матрицы P вполне типичен. Нули ниже диагонали означают, что движение из более высоких классов в более низкие отсутствует.

Построим матрицу Q: $Q = P + v\,'r$.

В нашем случае

$$Q = \begin{pmatrix} 0,65 & 0,05 & 0,025 \\ 0 & 0,55 & 0,175 \\ 0 & 0 & 0,775 \end{pmatrix}.$$

Подсчет запаса в следующем году показывает: $n(2) = (20;21;1)$.

Если получить структуру классов на 5 или 10 лет вперёд, то выкладки показывают, что система приобретает признаки перегруженности высоких классов. Такое поведение зависит от системы P. Необходимо знать меру того, насколько всё может стать неблагополучным. В математических терминах это означает – каково предельное состояние $n(T)$ при $T \to \infty$?

После T лет

$$\bar{n}(T) = n(0)Q^T. \tag{7}$$

В теории марковских цепей показывается при весьма общих условиях, которые будут выполняться в любой разумной постановке задачи о кадрах, что

$$\lim_{T \to \infty} Q^T = Q^\infty, \tag{8}$$

где Q^∞ стохастическая матрица с одинаковыми строками.

Если через q обозначить общую строку этой матрицы, то устремляя T к бесконечности в формуле (7), получаем

$$n(\infty) = n(0)Q^\infty = Nq, \tag{9}$$

где N - общий (фиксированный) размер системы. Следовательно, имеется предельная структура, которая не зависит от начальной структуры. Простейший способ подсчёта q связан с тем, что предельная структура должна удовлетворять условию

$$n(\infty) = n(\infty)Q \quad \text{или} \quad q = qQ. \tag{10}$$

Эта система уравнений является вырожденной, однако если опустить одно из уравнений и использовать тот факт, что

$$\sum_{i=1}^{k} n_i(\infty) = N \quad \left(\sum_{i=1}^{k} q_i = 1 \right),$$

то уравнения можно решить.

В применении к кафедре ВиПМ система имеет вид:

$$\begin{cases} -0,35x + 0,05y + 0,025z = 0; \\ \qquad\quad -0,45y + 0,175z = 0; \\ \quad x \; + \; y \; + \; z \; = 1. \end{cases}$$

Решая эту систему, получаем $q = (0,04; 0,26; 0,66)$. Учитывая, что на кафедре работает 42 преподавателя, получаем предельную структуру: 4 ассистента, 11 доцентов и 27 докторов наук.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ:

1. Barthlomew D.J. (1973). Stochastic models for social processes, 2nd, edn. Wiley; New York.
2. Гмурман В.Е. Теория вероятностей и математическая статистика. М. «Высшая школа», 1999, 479с.

Работа представлена на научную международную конференцию «Перспективы развития вузовской науки», "Дагомыс" (Сочи), 20-23 сентября 2008 г. Поступила в редакцию 01.10.2008.