К АНАЛИЗУ ПРОБЛЕМЫ ИНТЕГРИРОВАНИЯ НЕЛИНЕЙНЫХ ВОЛНОВЫХ УРАВНЕНИЙ

Крупенин В.Л.

Институт машиноведения РАН

Москва, Россия

1. Нелинейные волновые процессы моделируются при помощи нелинейных дифференциальных уравнениях в частных производных. Если ограничится нелинейными аналогами волнового уравнения, то упомянутая модель может быть представлена в виде

$$u_{tt} - c^2 u_{xx} = h(u, u_t, u_x, t, x), \qquad (1)$$

h – нелинейная функция, структура которой определяется геометрическими и (или) физическими особенностями задачи. Раскладывая функцию h в ряд, в разных приближениях можно получать модели нелинейных волновых процессов. Нелинейные волновые эффекты весьма многочисленны и многообразны. В частности показывается, что при рассмотрении простейших нелинейных волновых моделей проявляются такие весьма характерные и важные явления как «деформирование» и «опрокидывание» профилей волн.

2. Рассмотрим примеры анализа нелинейных волн в так называемых виброударных системах с распределенными ударными элементами. Обозначим: u(x,t) – искомый прогиб. Пусть расстояние между струной и ограничителем равно Δ; 0<Δ<1. Имеем для определенности:

$$u(x,t) \le \Delta < 1,\ x\ [-½, ½],\ t \ge 0. \qquad (2)$$

При реализации в первом соотношении строгого неравенства задача линейна и, ограничиваясь консервативным случаем имеем $u \equiv u_{tt} - u_{xx} = 0$. Пусть: $u(\pm½, t) = 0$, $u(x,0) = u_0(x) \le 0$, $u_t(x,0) = 0$.Гладкость функции $u_0(x)$ такова, что (хотя бы в обобщенном смысле) обеспечивается существование и единственность решение задачи Коши в соответствующей линейной системе. При реализации контакта ограничитель действует на струну «от себя» поэтому при u>0:

$$u \le 0 \qquad (3)$$

Условие аналогичное (3) эквивалентно дозвуковому распространению взаимодействий. Потребуем: supp $u \subset \{(x,t);\ u(x,t) = \Delta$, где символ «supp» обозначает носитель обобщенной функции. Считая, что при взаимодействии энергия не теряется, постулируем здесь выполнение, имеющего место в соответствующей линейной системе соотношения, выражающего закон сохранения энергии, т.е. в смысле обобщенных функций $\partial/\partial t(|u_t| + |u_x|) = \partial/\partial x(2u_t u_x)$.Это соотношение постулируется и выражает, в частности, гиротезу удара:

$$u_t(x, t-0) = -u_t(x, t+0),\ (x,t) \in \text{supp}\ u,\ u(x,t) = \Delta. \qquad (4)$$

Данные определяют гипотезу удара взаимодействия струны об ограничителем без учета потерь энергии. Данную задачу можно символически записать в виде нелинейного уравнения Клейна – Гордона $u + \Phi(u) = 0$, где обобщенная функция Φ(u) определяется указанными соотношениями.

Постановка задачи о поляризованных колебаниях струны, находящейся, например, в трубе, вполне аналогична. Вместо неравенства (2) имеем двойное неравенство $u \lesseqgtr 0$.

3. Постановка задачи о взаимодействии струны с точечным ограничителем принципиально отличается от предыдущих, так как при достижении точечного ограничителя, струна некоторое время покоится на нем и мы имеем в определенном смысле аналог гипотезы об абсолютно неупругом ударе. При этом гипотеза взаимодействия подразумевает, что потери энергии отсутствуют. Обсуждение моделей диссипации энергии в системах с распределенными ударными элементами не проводится.

Пусть в плоскости колебаний струны зафиксирован точечный ограничитель и пусть точка фиксации есть (0,Δ). Таким образом здесь $u(0,t) \ge \Delta$. Записывая уравнение движения снова в виде нелинейного уравнения Клейна-Гордона, заметим, что при возникновении контакта струны с ограничителем, как отмечалось, ее серединная точка будет некоторое время покоится. Если t_k – начало k-го взаимодействия, а θ_k - его окончание: $u(0,t) = \Delta$, $t \in [t_k, \theta_k]$, то $\Phi(u) = -\Sigma R_k(t)\delta(x)[\eta(t-t_k) - \eta(\theta-\theta_k)]$, где к –индексы по которым проводится суммирование,δ(x) и η(t) – δ-функция Дирака и единичная функция Хевисайда;$R_k(t) = u_x(-0,t) - u_x(+0,t) \ge 0$, $t \in [t_k, \theta_k]$ -

сила реакции ограничителя. При реализации строгого неравенства) контакт отсутствует. Действие точечного ограничителя равносильно систематическому дополнительному защемлению (в данном случае - середины) струны.

Подробное изложение данных проблем дано в [1]. (Поддержка РФФИ 05-08-50183).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ:

1. Крупенин В.Л. К описанию динамических эффектов, сопровождающих колебания струн вблизи однотавровых ограничителей // ДАН. 2003. № 388 (3). С.31- 38.