ЗАДАЧА О НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОМ СОСТОЯНИИ ПОЛУБЕСКОНЕЧНЫХ ОБЛАСТЕЙ С КРИВОЛИНЕЙНОЙ ГРАНИЦЕЙ

Богомолов А.Н.*, Богомолова О.А.*, Ушаков А.Н.*, Шиян С.И.**

**Волгоградский государственный архитектурно-строительный университет, Волгоград, Россия*
***ПИ «Укргазниипроект», Киев, Украина*

Рассмотрим в плоскости z полубесконечную область S. Функция

$$z = w(z) = A + Bz - \frac{C}{z + a - bi}, \qquad (1)$$

где:

$z = x + iy;\ z = x + ih;\ h \le 0;$
$A = a_1 + ia_2; B = b_1 + ib_2; C = c_1 + ic_2 -$ комплексные числа, $a;\ b > 0 -$ действительные числа, является частным случаем отображающей функции, приведенной в работе [1], при *k*=0. Она осуществляет конформное отображение нижней полуплоскости Im*Z*<0 на область *S*.

Пусть некоторый участок границы L области S, занимаемой упругим телом, получил смещение, причем, $g_1(t)$ и $g_2(t)$ – граничные значения компонент смещения. Необходимо определить напряженное состояние в области S.

Рассмотрим известное граничное условие, приведенное в работе [2]:

$$\aleph\, j(t) - \frac{w(t)}{\overline{w'(t)}}\overline{j(t)} - \overline{y(t)} = 2m\left(g_1(t) + ig_2(t)\right), \qquad (2)$$

где: $\aleph$ и m – упругие постоянные; $j(t), y(t), j'(t)$ – граничные значения голоморфных в нижней полуплоскости функций $j(z), y(z), j'(z)$, причем

$$j(t) = o(l);\ \ y(z) = c + o(l);\ \ j'(z) = o\left(\frac{l}{z}\right),$$

где c – произвольная постоянная.

Будем считать, что при больших значениях $|t|$ заданные функции подчинены условию

$$g_1 + ig_2 = G + o(l),$$

где G – произвольная комплексная постоянная.

Кроме того, полагаем, что $g_1 + ig_2$ удовлетворяет условию Гельдера, включая бесконечно удаленную точку.

Используя граничное условие (2), ему сопряженное и свойства интегралов типа Коши, получим

$$j(z) = J_1(z) + \frac{4b^2 C}{\aleph\left(\overline{C - 4b^2 \overline{B}}\right)} \frac{\overline{j'(-a - bi)}}{(z + a - bi)} - \frac{mG}{\aleph}; \qquad (3)$$

$$y(z)=\frac{(z+a-bi)^2}{B(z+a-bi)^2+C}\left\{J_2(z)+\aleph C\left(\frac{\overline{j'(-a-bi)}}{(z+a-bi)}+\frac{\overline{j(-a-bi)}}{(z+a-bi)^2}\right)-\right.$$
$$\left.-\left(\overline{A}+\overline{B}z\right)j'(z)-\frac{\overline{C}j'(z)}{(z+a+bi)}+\frac{\overline{C}j'(-a-bi)}{(z+a+bi)}-\frac{mB\overline{G}}{2B-1}\right\}, \qquad (4)$$

где

$$j'(-a-bi)=\frac{\aleph^2\left(\left(c_1-4b^2b_1\right)^2+\left(c_2-4b^2b_2\right)^2\right)}{\aleph^2\left(\left(c_1-4b^2b_1\right)^2+\left(c_2-4b^2b_2\right)^2\right)-\left(c_1^2+c_2^2\right)}\left(J_1'(-a-bi)+\frac{C}{\aleph\left(\overline{C}-4b^2\overline{B}\right)}\right) \qquad (5)$$

$$j(-a-bi)=J_1(-a-bi)+\frac{2bCi}{\aleph\left(\overline{C}-4b^2\overline{B}\right)}\overline{j'(-a-bi)}-\frac{mG}{\aleph}$$

$$J_1(z)=-\frac{m}{p\aleph i}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{g_1(t)+ig_2(t)}{t-z}dt;$$
$$J_2(z)=\frac{m}{pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{g_1(t)+ig_2(t)}{t-z}\left(B+\frac{C}{(t+a-bi)^2}\right)dt. \qquad (6)$$

Для определения компонент напряжения необходимо воспользоваться формулами

$$s_{xx}+s_{hh}=2\left\{j'(z)+\overline{j'(z)}\right\}=4\operatorname{Re}j'(z);$$
$$s_{hh}-s_{xx}+2it_{xh}=\frac{2}{\overline{w'(z)}}\left\{\overline{w(z)}j''(z)+w'(z)y'(z)\right\}, \qquad (7)$$

правые части которых могут быть вычислены при помощи формул (3) и (4).

После этого компоненты деформации определяются по формулам

$$e_{xx}=\frac{1}{2m}\left\{s_{zz}-n\left(s_{zz}+s_{hh}\right)\right\};$$
$$e_{hh}=\frac{1}{2m}\left\{s_{hh}-n\left(s_{zz}+s_{hh}\right)\right\};$$
$$e_{xh}=\frac{1}{2m}t_{xh},$$

Рассмотрим пример.

Пусть отрезок $-l\le t\le l$ оси Ox подвержен равномерному вертикальному смещению p, а остальная часть границы свободна от каких-либо внешних воздействий.

Отделив действительную часть от мнимой части в выражении (1), получаем при $x=t\ uh=0$ параметрические уравнения

$$\begin{cases} x(t) = a_1 + b_1 t - \dfrac{c_1(t+a) - c_2 b}{(t+a)^2 + b^2}\ ; \\ y(t) = a_2 + b_2 t - \dfrac{c_2 b + (t+a)c_2}{(t+a)^2 + b^2}\ , \end{cases} \tag{9}$$

описывающие кривые, являющиеся границами односвязных областей, отображаемых функцией (1).

Итак, $g_1(t) = -p;\ g_2(t) = 0;\ \ -l \le t \le l$.

Формулы (3) и (4) при этом приобретают вид

$$j(z) = \frac{mp}{p\aleph i}\ln\frac{z-l}{z+l} + \frac{4b^2 C}{\aleph\left(\overline{C} - 4b^2\overline{B}\right)}\frac{\overline{j'(-a-bi)}}{(z+a-bi)} - \frac{mG}{\aleph}\ ; \tag{10}$$

$$\begin{aligned} y(z) = \frac{(z+a-bi)^2}{B(z+a-bi)^2 + C}\Bigg\{ & \frac{mpC}{pD(z)i}\left[\left(\frac{C - BD(z)}{C}\right)\ln\frac{z-l}{z+l} - \frac{2l(z+a-bi)}{a^2 - b^2 - l^2 - 2abi} - \right. \\ & \left. - \ln\frac{a+l-bi}{a-l-bi}\right] + \aleph C\left(\frac{\overline{j'(-a-bi)}}{(z+a-bi)} + \frac{\overline{j(-a-bi)}}{(z+a-bi)^2}\right) - \left(\overline{A} + \overline{B}z\right)j'(z) - \frac{\overline{C}j'(z)}{(z+a-bi)} + \\ & + \frac{\overline{C}j'(-a-bi)}{(z+a-bi)} - \frac{mB\overline{G}}{2B-1}\Bigg\}\ , \end{aligned} \tag{11}$$

где: $D(z) = b^2 - a^2 - z^2 - 2az + 2b(z+a)i$.

Условимся, что под выражением $\ln\dfrac{z-l}{z+l}$ будем понимать приращение функции $\ln(z-t)$ при непрерывном изменении t в интервале $t \in (-l; l)$.

Подставляя выражения (1), (5), (6), (10), (11) в (7) и (8), получаем в замкнутом виде формулы для компонент напряжения s_{xx}, s_{hh}, t_{xh} и деформации e_{xx}, e_{hh}, e_{xh} , дающие решение задачи для рассматриваемого случая.

Полученные выражения при принятых выше условиях являются голоморфными в нижней полуплоскости функциями, поскольку этим свойством обладают функции, входящие в правую часть соотношения (7).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ:

1. Богомолов А.Н. Расчет несущей способности оснований сооружений и устойчивости грунтовых массивов в упругопластической постановке / А.Н.Богомолов. – Пермь: ПГТУ, 1996.
Мусхелишвили Н. И. Некоторые основные задачи математической теории упругости / Н.И.Мусхелишвили. - М.: Наука, 1966