УДК 517.977.58: 519.865.7

КОНКУРЕНЦИЯ В УСЛОВИЯХ ДУОПОЛИИ С ТОЧКИ ЗРЕНИЯ ТЕОРИИ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ

Просвиров А.Э., Музюкова Е.В.

Волгоградский филиал Российского торгово-экономического университета, Волгоград

Подробная информация об авторах размещена на сайте
«Учёные России» - http://www.famous-scientists.ru

Рассмотрена экономико-математическая модель конкуренции двух фирм на однородном рынке сбыта с точки зрения теории оптимального управления. Приводится формулировка соответствующей задачи отыскания программного управления, минимизирующего суммарные издержки предприятия, необходимые для достижения заданной рыночной доли на дуополистическом рынке. Дана экономическая интерпретация полученных результатов.

Математическому моделированию процессов конкуренции и сотрудничества двух фирм на различных рынках посвящено довольно много научных работ, в основном использующих аппарат теории игр и статистических решений. В качестве примера можно привести работы таких исследователей, как Курно, Стакельберг, Бертран, Нэш, Парето, основные результаты которых приведены в [1-2,5].

В настоящей работе авторами предпринята попытка математического моделирования конкурентной борьбы с точки зрения экономической динамики с привлечением аппарата теории оптимального управления.

Изменение объемов продаж конкурирующих фирм с течением времени может быть описано следующей системой дифференциальных уравнений [4]:

$$\begin{cases} \dfrac{dq_1(t)}{dt} = a_1 q_1(t)\left[N - \left(q_1(t) + q_2(t)\right)\right] - b_1 q_1(t) q_2(t) \\ \dfrac{dq_2(t)}{dt} = a_2 q_2(t)\left[N - \left(q_1(t) + q_2(t)\right)\right] - b_2 q_2(t) q_1(t) \end{cases} \quad (1)$$

с начальными условиями $q_1(0) = q_{01}, \quad q_2(0) = q_{02}$. (2)

Здесь и далее использованы следующие обозначения:

$q_1(t)$ - объем продаж фирмы I;

$q_2(t)$ - объем продаж фирмы II;

N - объем рассматриваемого сегмента рынка сбыта;

a_1, b_1, a_2, b_2 -положительные коэффициенты, характеризующие степень влияния различных факторов на изменения объема продаж первой и второй фирмы соответственно [4].

Замена переменных $y_1 = \dfrac{q_1}{N}$, $y_2 = \dfrac{q_2}{N}$, $t = a_2 N t$; $B_1 = \dfrac{b_1}{a_1}$, $B_2 = \dfrac{b_2}{a_2}$, $u_1(t) = \dfrac{a_1}{a_2}$ приводит исходную задачу Коши к безразмерному виду:

$$\begin{cases} \dfrac{dy_1(t)}{dt} = u_1(t)y_1(t)[1 - y_1(t) - y_2(t)] - B_1 y_1(t)y_2(t) \\ \dfrac{dy_2(t)}{dt} = y_2(t)[[1 - y_1(t) - y_2(t)]] - B_2 y_1(t)y_2(t) \end{cases} \qquad (3)$$

$$y_1(0) = y_{01}, \quad y_2(0) = y_{02}$$

Функция $u_1(t)$ характеризует степень воздействия внутренней среды первого предприятия на рост объемов продаж по отношению к аналогичной величине конкурента.

Неизбежно возникает вопрос о минимизации управленческого воздействия $u_1(t)$ первого предприятия, необходимые для достижения к известному моменту времени T заранее запланированной рыночной доли $y_1(T)$, ответ на который может быть, по мнению авторов, получен из решения следующей задачи оптимального управления, которая и является предметом исследования данной работы: найти такое программное управление $u = u(t)$, которое доставляет минимум целевому функционалу

$$J = \int_0^T u(t)dt \to \min, \qquad (4)$$

удовлетворяет системе дифференциальных уравнений с граничными условиями (3) и ограничениями на состояние системы и управление:

$$y_1(t) \ge 0,\ y_1(t) \le y_{\max},\ y_2(t) \ge 0,\ y_1(T) \ge y_{1end}$$

$$u_1(t) \ge 0,\ u_1(t) \le u_{\max}, \text{ где } t \in [0,T]. \qquad (5)$$

Здесь y_{1end} — желаемая рыночная доля первого предприятия в этот же момент времени, а значение $u_{\max}$ выбиралось из следующих соображений: пусть предприятие для достижения поставленной цели располагает ресурсами Q, а величина $u(t)$ может трактоваться как скорость расходования ресурсов предприятия. Следовательно, $u_{\max} = Q/T$. Следует, однако, отметить, что это далеко не единственный способ выбора этой величины.

Алгоритм численного решения задачи (4)-(5) основан на отмеченной рядом исследователей [5] глубокой связью между задачами оптимального управления и математического программирования. С этой точкой зрения задача оптимального управления для непрерывной системы образует бесконечномерную задачу математического программирования в бесконечномерном пространстве. Основным достоинством данного подхода является возможность применения хорошо развитого аппарата численного решения задач математического программирования к теории оптимального управления.

Следуя указанному подходу [5], переформулируем задачу в дискретной форме. Временной интервал $[0,T]$ разбивается на n равных временных интервалов, целевой функционал (4) заменяется интегральном суммой, а задача Коши (3) – конечно-разностной аппроксимацией, основанной на интерполяционных уравнениях Адамса [5].

В результате получаем задачу нелинейного программирования, в которой целевому функционалу соответствует целевая функция, а уравнение состояния превращается в $2n$ ограничений в форме равенств.

Ограничения на состояние системы и управления трансформируются в ограничения в форме неравенств задачи математического программирования:

$$J = \sum_{i=1}^{n} u(i-1) dt_i \to \min \tag{6}$$

$$y_k(1) - y_k(0) - 12b\left[f_k(0) + f_k(1)\right] = 0$$

$$y_k(2) - y_k(1) - 2b\left[-f_k(0) + 8f_k(1) + 5f_k(2)\right] = 0$$

$$y_k(i) - y_k(i-1) - b\left[f_k(i-3) - 5f_k(i-2) + 19f_k(i-1) + 9f_k(i)\right] = 0,$$

$$(i = 3 \ldots n)$$

$$y_k(i) \ge 0;\ i = 0,\ldots,n;\ y_k(i) \le y_{\max};\ i = 0,\ldots,n;\ y_1(n) \ge y_{1end};$$

$$u(i-1) \le u_{\max};\ .\ i = 0,\ldots,n \tag{7}$$

Здесь:

$$f_1(i) = u(i-1)y_1(i)\left[1 - y_1(i) - y_2(i)\right] - B_1 y_1(i) y_2(i)$$

$$f_2(i) = y_2(i)\left[1 - y_1(i) - y_2(i)\right] - B_2 y_1(i) y_2(i)$$

$$b = \frac{T}{24n};\ dt_i = \frac{T}{n};\ k = 1;2.$$

Задача решалась численно с помощью надстройки «Поиск решения» пакета Microsoft Office Excel 2003 по встроенному алгоритму нелинейной оптимизации Generalized Reduced Gradient (GRG2), разработанному *Леоном Ласдоном* (Leon Lasdon, University of Texas at Austin) и *Аланом Уореном* (Allan Waren, Cleveland State University).

В результате в каждой точке находились $u(i-1)$, $y_1(i)$, $y_2(i)$, а также значения целевого функционала J.

Точность полученного решения оценивалась «апостериори» путем подстановки найденного программного управления $u = u(t)$ в (3) с последующим численным интегрированием системы ОДУ методом Рунге-Кутта четвертого порядка [3].

Некоторые результаты численных расчетов приведены на рис.1-3. При построении графиков использовались следующие значения параметров модели: $y_{1end} = 0{,}5$; $n = 20$; $y_{\max} = 1$; $y_1(0) = 0{,}1$; $y_2(0) = 0{,}3$.

Значение T варьировалось в пределах от 2 до 3.

Анализ рис. 1 позволяет сделать вывод об адекватности построенной математической модели и достаточной точности аппроксимации исходной задачи оптимального управления (3)-(5) задачей нелинейного программирования (6)-(7).

Об этом свидетельствует тот факт, что непрерывные кривые, построенные по результатам численного интегрирования задачи Коши (3) практически совпадают с точками, соответствующими решению конечно-разностной задаче нелинейного программирования.

Рис. 2 указывает на то, что во всех случаях поведение оптимального программного управления $u = u(t)$ обнаруживает следующую характерную особенность: до определенного момента времени t_{crit} $u(t) = u_{\max}$, после чего резко падает до нуля. По результатам численных экспериментов $t_{crit} \cong (0{,}4 \div 0{,}6)T$.

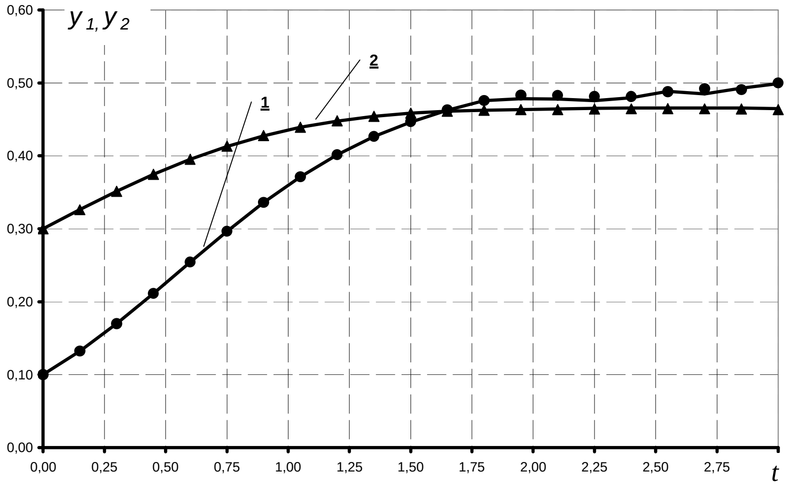

Рис.1. Оптимальная динамика объема продаж фирмы I и фирмы II для *T*=3. Сплошные линии соответствуют результатам контрольного интегрирования методом Рунге-Кутта.

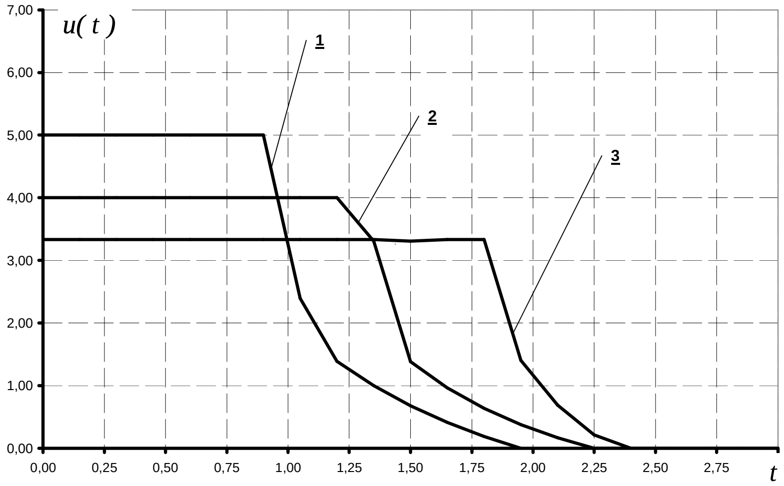

Рис.2. Зависимость оптимального управления $u = u(t)$ от времени для случаев *T*=2,0 (кривая 1), *T*=2,5 (кривая 2), *T*=3,0 (кривая 3). Выделенные ресурсы *Q*=10,0.

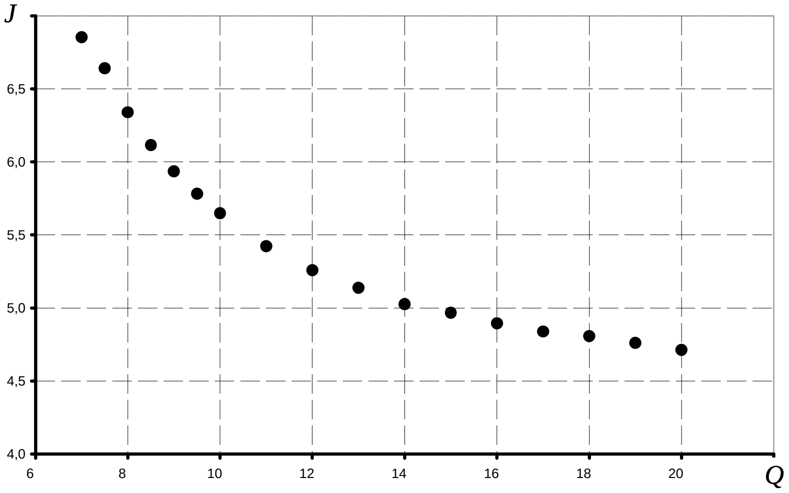

Рис.3. Зависимость оптимального значения целевого функционала J от ресурсов Q для *T*=2.

Это позволяет сделать практически важный вывод о том, что оптимальная стратегия предприятия по достижению желаемой рыночной доли в условиях дуополии заключается в приложении максимальных усилий именно на начальном участке, после чего, начиная с момента времени t_{crit}, можно значительно уменьшить интенсивность расхода ресурсов.

Зависимость оптимального значения целевого функционала *J*, от выделенных ресурсов *Q* представлена на рис. 3. Убывающий характер этой зависимости объясняется тем, что с увеличением *Q* возрастает $u_{\max}$, а значит, и интенсивность использования ресурсов на начальном, «стартовом» участке траектории динамической системы. А поскольку именно этот участок является наиболее важным с точки зрения достижения желаемого результата, в конечном итоге это приводит к интегральному эффекту экономии ресурсов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ:

1. Бережной Л.И. Теория оптимального управления экономическими системами: Учебное пособие. - СПб.: ИВЭСЭП, Знание,2002. 64 с.

2. Ванько В.И., Ермошина О.В., Кувыркин Г.Н. Вариационное исчисление и оптимальное управление: Учеб. для вузов. 2-е изд./ Под ред. В.С. Зарубина, А.П. Крищенко.—М.: Изд-во МГТУ им. Баумана, 2001. 488 с.

3. Мудров А.Е. Численные методы для ПЭВМ на языках Бейсик, Фортран и Паскаль. Томск: МП «Раско», 1991. 272 с. ил.

4. Просвиров А.Э. Копылов А.В., Динамическая модель конкуренции двух фирм на однородном рынке // Успехи современного естествознания, №8, 2003. стр. 29-33.

5. Табак Д., Куо Б. Оптимальное управление и математическое программирование, перев. с англ. М., Наука, 1975. 280 с.

COMPETITION IN CONDITIONS DUOPOLY FROM THE POINT OF VIEW OF THE THEORY OF OPTIMUM CONTROL

Prosvirov A.E., Muzyukova Ye.V.
Volgograd Branch of Russian Trade Economic University, Volgograd

The economic-mathematical model of a competition of two firms on a homogeneous commodity market is considered from the point of view of the theory of optimum control. The formulation of a corresponding task of search of program management is resulted, minimize total expend the enterprises necessary for achievement of the set market share on duopoly market. Economic interpretation of the received results is given.