

**СТРУКТУРА И СОДЕРЖАНИЕ  
ФАКУЛЬТАТИВНОГО КУРСА  
«ДИНАМИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ И  
ФРАКТАЛЫ» ДЛЯ ШКОЛЬНИКОВ**

Гоца Н.И.

*Поморский государственный университет  
им. М.В. Ломоносова, Архангельск, Россия*

**Введение**

Современное молодое поколение отличается нацеленностью на приобретение прикладных знаний и умений. При изучении математики, как в школе, так и в вузе часто можно слышать вопрос: «А как это можно применить на практике?». Частично ответить на него помогают межпредметные связи математики с физикой, химией, географией, техникой, но сейчас стандартных примеров уже недостаточно. Темпы развития современной науки настолько высоки, что разрыв между ее достижениями и содержанием базового курса школьной математики не только огромен, но и постоянно увеличивается. Стандартный курс математики построен на основе изучения классических разделов, сформировавшихся, в основном, до 20 века. Школьники в рамках программы практически не имеют возможности для знакомства с современными математическими теориями, их интересными и обширными приложениями.

В то же время, для формирования научных мировоззренческих представлений школьникам необходимо дать возможность познакомиться с новыми теориями и направлениями развития математики, их применением для описания разнообразных процессов и явлений окружающего мира, решения многочисленных прикладных задач. Это имеет большую общекультурную и практическую значимость, в том числе позволит расширить кругозор учеников, развить их математическое мышление и культуру, инициативу и творческий потенциал. Знакомство школьников с современными разделами математики, является хорошей базой для организации их научно-исследовательской деятельности.

Большая часть современных исследований в той или иной мере связана с использованием различных компьютерных программ. Это имеет дополнительную привлекательность для школьников, которые прекрасно осознают необходимость высокого уровня владения компьютером для успешного обучения, проведения научных исследований, применения информационных ресурсов и технологий в практике, получения престижной работы.

Знакомство с современными направлениями развития математики, новыми теоретическими методами исследований, использованием компьютерных программ и технологий для решения учебных и научных задач может осуществляться в рамках факультативов, которые открывают большие возможности для реализации познавательных интересов учащихся и развития личности в целом.

В этом случае большую помощь школьному учителю может оказать привлечение к разработке и проведению занятий преподавателей, аспирантов и студентов университетов. Такие курсы могут быть организованы не только в виде факультативов, но и в летних математических школах, школах для одаренных детей и т.д.

Выбор темы факультатива определило то, что теория динамических систем, фракталов и хаоса является одним из молодых и бурно развивающихся разделов математики, который имеет широкий спектр приложений во многих областях, как математики, так и физики, биологии, медицины, геологии, психологии, экономики и др.

Несмотря на то, что теория динамических систем изучается в рамках научно-исследовательской подготовки специалистов в вузах, знакомство с некоторыми её разделами вполне доступно и школьникам. Мы предлагаем включить в курс основные понятия и свойства дискретных динамических систем, такие как динамическая система, итерация, неподвижные точки, периодические орбиты, паутинные диаграммы, понятие хаоса. Тема «Фракталы» познакомит с классическими фракталами, историей их возникновения, способами построения, нахождением размерности. Изучение элементов двумерной и комплексной динамики расширит и углубит представление о различных динамических системах и фракталах, а также покажет их внутренние взаимосвязи.

Большую роль при изучении динамических систем играет компьютерное моделирование. В качестве основного программного пакета для курса «Динамические системы и фракталы» нами выбрана система Matlab, возможности которой позволяют применять ее для расчетов практически в любой области науки и техники. К достоинствам этой системы следует отнести ее открытость и расширяемость, а также то, что она имеет язык программирования, ориентированный на математические расчеты. Большинство команд и функций системы реализованы в виде текстовых m-файлов, которые просты, понятны и доступны для модификации. Пользователь может создавать отдельные файлы для реализации специфических задач и по скорости выполнения этих задач система нередко выигрывает у своих конкурентов.

Цели и задачи факультативного курса «Динамические системы и фракталы»

*Основной целью* этого курса является знакомство учащихся с теорией динамических систем, фракталов и хаоса, ее приложениями в различных областях знания, а также применение пакета Matlab при изучении динамики отображений и построении фракталов.

*Целями* факультативного курса также являются:

- углубление знаний учащихся с учётом их интересов и склонностей, развитие математического мышления;

- воспитание у школьников глубокого интереса к математике и её приложениям, развитие инициативы и творчества учащихся;

- формирование представлений о математике как части общечеловеческой культуры, понимания значимости математики для общественного прогресса.

*Задачами* данного факультативного курса являются:

- повышение уровня математического мышления учащихся;

- развитие навыков исследовательской деятельности;
- формирование знаний о прикладных возможностях математики;

- формирование навыков использования информационных ресурсов и информационных технологий в практике;

- повышение мотивации школьника к учебе;

- повышение уровня математической культуры учащихся.

Структура факультативного курса «Динамические системы и фракталы»

Факультативный курс для школьников 10-11 классов рассчитан на 60 часов при двух часах занятий в неделю. Основными формами работы являются лекция, семинар и лабораторная работа в компьютерном классе. Проверка усвоения изученного материала проходит в форме самостоятельных и контрольных работ.

Курс состоит из теоретической части (35 часов) и лабораторного практикума (25 часов). Материал теоретической части разбит на четыре модуля: «Исследование динамики отображений», «Фракталы», «Элементы двумерной динамики» и «Элементы комплексной динамики». Модуль «Фракталы» достаточно независим от остальных трех, поэтому его положение в структуре курса можно менять. В то же время, геометрические фракталы могут быть построены с помощью аффинных преобразований плоскости и систем итерированных функций, что говорит о взаимосвязи второго и третьего модулей. При изучении элементов комплексной динамики мы также встречаемся с примерами фракталов – множествами Жюлиа и Мандельброта.

Третий и четвертый модули независимы друг от друга, но их изучение невозможно без знакомства с основными понятиями и примерами простейших динамических систем, чему посвящен первый модуль. Поэтому мы и предлагаем именно такое расположение модулей факультативного курса. Отметим также, что в зависимости от уровня математической подготовки класса и наличия времени, факультативный курс может состоять только из первого или второго модулей, или из нескольких на выбор учителя. Изучение

элементов двумерной и/или комплексной динамики может быть продолжено в следующем классе.

Лабораторный практикум знакомит школьников с компьютерной системой MatLab, ее применением при исследовании дискретных динамических систем, а также при построении геометрических фракталов различными способами. Первая треть практикума посвящена изучению основных элементов, свойств и возможностей системы MatLab, программированию внутри системы и работе с m-файлами. Остальные две трети лабораторных занятий согласованы с темами теоретической части, причем в большей степени, первого модуля.

Такое построение практикума позволяет начать лабораторный курс одновременно с изучением первого модуля теории, отводя на каждый из них по 1 часу в неделю. Освоив материал первого модуля (10 часов), школьники одновременно изучат и основы системы MatLab, что позволит им самостоятельно создавать программы для нахождения итераций точек и функций, построения паутиных и бифуркационных диаграмм.

Содержание факультативного курса «Динамические системы и фракталы» соответствует познавательным возможностям учеников 10-11 классов, дополняет и расширяет основной курс школьной математики. Например, здесь мы отрабатываем понятия сложной функции и производной, изучаем не только одно-, но и двумерные отображения. Школьники применяют движения на плоскости и знакомятся с аффинными преобразованиями. При изучении орбиты точки, притягивающей и отталкивающей точек, мы опираемся на интуитивное понятие предела последовательности. При знакомстве с элементами комплексной динамики, прежде всего, возникает необходимость поработать с комплексными числами, научиться решать некоторые виды уравнений, а затем применить эти знания при исследовании динамики отображений в комплексной области.

Данный курс дает школьникам возможность приобрести опыт работы при повышенном уровне требований, знакомит с современной теорией и её многочисленными приложениями, позволяет изучить новую для них компьютерную систему MatLab и ее применение к решению математических и прикладных задач. Все это развивает учебную мотивацию школьников, математическое мышление, навыки исследовательской деятельности и применения информационных технологий на практике, а также формирует представление о математике как одной из основ мировой науки и культуры.

I. Теоретическая часть. Динамические системы и фракталы (35 часов)

Модуль 1. Исследование динамики отображений (10 часов):

- Нахождение неподвижных точек отображения  $f(x)$ . Изучение динамики отображения  $f(x)$  в зависимости от типа неподвижных точек.

- Нахождение 2-периодических точек отображения  $f(x)$ . Изучение динамики отображения  $f(x)$  в зависимости от типа дупериодических точек.

- Нахождение интервалов с интересной динамикой отображения.

- Построение бифуркационной диаграммы и ее исследование.

- Изучение областей возможного существования хаоса у отображения с параметром.

- Проверочная работа.

Модуль 2. Фракталы (8 часов):

- Классические фракталы: снежинка Коха, пыль Кантора, ковер Серпинского, губка Менгера.

- Геометрические фракталы.

- Понятие фрактальной размерности и примеры ее вычисления.

- Фрактальные кривые и их построение методом L – кодов.

- Проверочная работа.

Модуль 3. Элементы двумерной динамики (10 часов):

- Двумерные (аффинные) отображения и образы точек плоскости.

- Построение образов множеств на плоскости при двумерном отображении.

- Итерирование двумерных отображений.

- Образы систем функций.

- Итерации систем функций.

- Расстояние между множествами.

- Примеры нахождения семейств функций.

- Проверочная работа.

Модуль 4. Элементы комплексной динамики (7 часов):

- Комплексные числа и действия с ними.

- Решение простейших уравнений.

- Примеры комплексных отображений.

- Множества Жюлиа и Мандельброта.

II. Лабораторный практикум (25 часов)

Содержание лабораторного практикума тоже может быть разбито на модули. Например, модуль 5 может включать 1-4 пункты; модуль 6, соответственно, 5-7 пункты и т.д. Но материал практикума имеет очень сильные внутренние взаимосвязи и зависимости, поэтому мы считаем, что лучше рассматривать его как единое целое.

1. Введение (1 час).

2. Описание программы MatLab (2 часа).

3. Построение графиков функций (4 часа):

- Построение графиков функций одной переменной.

- Построение графиков тригонометрических функций.

- Построение графиков произведения, отношения функций, степени функции.

- Построение графиков кусочно-заданных функций.

4. Самостоятельная работа (1 час).

5. Программирование и способы работы с m-file (2 часа):

- Основы работы с m-file.

- Построение графиков кусочно-заданных функций с помощью m-file.

6. Основные программы, используемые для исследования динамики отображения (4 часа):

- Программа для построения графика функции одной переменной с параметром.

- Программа для построения графиков итераций функции.

- Программа для нахождения итераций точки.

- Программа для графического нахождения неподвижных, дупериодических и п-периодических точек.

7. Самостоятельная работа (1 час).

8. Паутинные диаграммы (3 часа):

- Программа для построения паутиной диаграммы.

- Применение паутиной диаграммы для определения типов неподвижных точек.

- Применение паутиной диаграммы для определения типов дупериодических точек.

9. Бифуркационная диаграмма (1 час).

10. Контрольная работа на исследование динамики функции с использованием системы MatLab (2 часа).

11. Построение множеств Жюлиа и Мандельброта для комплексных отображений (4 часа).

Апробация

В 2005-2006 годах совместно со студентами математического факультета ПГУ мы организовали и провели факультативный курс «Динамические системы и фракталы» для учеников 9-10 классов с углубленным изучением математики в школе № 22 г. Архангельска. Изучение такого курса позволило школьникам перейти на более высокий уровень математических знаний, сформировать исследовательские навыки, научиться использовать информационные ресурсы и технологии на практике, познакомиться с приложениями динамических систем и фракталов в науке и природе, развить эстетические вкусы. Все это, безусловно, способствовало развитию мировоззрения учеников и индивидуальных качеств их личности.

Отметим, что наш факультативный курс позволяет организовать *исследовательскую деятельность* учащихся, как индивидуально, так и в малых группах. Темы исследовательских работ могут быть очень разнообразны, например, построение фрактальных кривых различными способами; исследование динамики отображений с параметром; изучение динамики простейших отображений в комплексной области; построение множеств Жюлиа и Мандельброта для некоторых

отображений. Большой интерес представляет изучение с позиций теории динамических систем моделей популяционных процессов в природе и обществе; применение фракталов в компьютерной графике и др.

В рамках проектной технологии участники факультатива подготовили доклады о применении динамических систем и фракталов в различных областях человеческого знания. Они выступали с докладами перед учениками и учителями своей школы. Два школьника с докладом о построении фракталов с применением систем итерированных функций успешно выступили на международном семинаре в Поморском университете (2006). Весной 2007 года доклад двух участниц факультатива «Построение фракталов методом L-кодов» занял второе место на конференции «Наука в руках молодых» в Архангельском техническом университете.

#### **НАУЧНЫЕ ДОСТИЖЕНИЯ УРАЛЬСКОЙ ВЫСШЕЙ ШКОЛЫ В ОБЛАСТИ ТРИБОТЕХНИКИ**

Зимин А.И., Минухин Л.А., Строганов Ю.Н.  
*Институт механизации, автоматизации и  
электрификации аграрного производства ФГОУ  
ВПО «Уральская государственная  
сельскохозяйственная академия»  
Екатеринбург, Россия*

Одной из главных задач современной науки является повышение надёжности машин и технологического оборудования путём увеличения ресурса быстроизнашивающихся деталей на основе результатов триботехнических исследований. Это относится прежде всего к оборудованию подверженному наиболее интенсивным видам изнашивания: абразивному, коррозионно-механическому, тепловому и другим.

В результате теоретических исследований, обобщения опыта эксплуатации оборудования и специально выполненных промышленных и лабораторных исследований обнаружен ряд неизвестных ранее фактов, характерных для изнашивания деталей машин в условиях высоких нагрузок и отсутствия смазки.

1. Исследования абразивного изнашивания позволили установить неизвестное ранее явление стабилизации износа металлов при взаимодействии с абразивными материалами. Суть этого явления состоит в том, что в паре трения, например, металл – горная порода, работающих при нагрузках, вызывающих разрушение находящихся в контакте выступов кусков горной породы или частиц абразива, износ стабилизируется и остаётся постоянным при дальнейшем увеличении нагрузки [1].

С учётом установленного явления упростились разработки расчётов ресурса быстроиз-

нашивающихся деталей и прогнозирование геометрических параметров изношенных деталей. Это способствует выбору рациональной конструкции деталей, увеличению их ресурса и совершенствованию технического обслуживания и ремонта машин.

2. По результатам обобщения опыта эксплуатации оборудования и специально выполненных экспериментов обнаружен ряд неизвестных ранее фактов, характерных для изнашивания рабочих органов машин в условиях агрессивных сред:

- интенсивное изнашивание поверхности металлических деталей в агрессивных средах является не только результатом образования окислов и гидратов окислов, но и образования солей, как правило имеющих более высокие твердость и хрупкость, и менее прочную связь с основным металлом;

- скорость протекания процесса коррозионно-механического изнашивания определяется температурой в зоне фрикционного контакта;

- характер протекания процесса коррозионно-механического изнашивания обусловлен переходом химических элементов (S, F) из твердой или жидкой фазы в газовую под действием высокой температуры, возникающей в зоне фрикционного контакта;

- в условиях активизации агрессивной среды под действием температуры в зоне фрикционного контакта коррозионная стойкость сталей, легированных хромом и никелем, незначительно отличается от конструкционных сталей общего назначения.

Установлена неизвестная ранее закономерность изменения интенсивности коррозионно-механического изнашивания металлов пар трения в агрессивных средах от температуры в зоне фрикционного контакта, заключающаяся в том, что скорость коррозионно-механического изнашивания определяется температурой, возникающей в зоне фрикционного контакта металлов, под действием которой происходят фазовый переход в парообразное состояние и активизация агрессивных сред, а также интенсификация электро-механических процессов в результате образования солей сильных кислот (например  $FeS_2$ ,  $FeF$ ,  $FeCl$ ), характеризующихся меньшей прочностью адгезии по сравнению с прочностью основного металла [2].

Исследования позволили сформулировать требования к служебным характеристикам металлов, работающим в агрессивных средах и обосновать инженерии поверхностей быстроизнашивающихся деталей.

3. Особенностью изнашивания деталей, работающих в тяжёлых скоростных, а следовательно, температурных режимах является зависимость механизма изнашивания (формирования частиц износа) и интенсивности изнашивания от температуры в зоне фрикционного контакта. Ус-