вающий одновременную стабилизацию семейства систем

$$\dot{x} = A_i x + B_i u, \quad i = 1, \ldots, N, \qquad (5)$$
$$u = Kx.$$

В этом случае мы приходим к следующей задаче: найти матрицы $X = X^T > 0$ и Y такие, что

$$XA_i^T + Y^T B_i^T + A_i X + B_i Y < 0, \quad i = 1, \ldots, N.$$

Данная задача не является тривиальным обобщением рассмотренной выше, но есть уверенность в том, что предложенный подход позволит получить конструктивное ее решение.

Задача одновременной стабилизации стохастических систем приводит к матричным неравенствам более сложного вида:

$$\begin{bmatrix} XA_i^T + Y^T B_i^T + A_i X + B_i Y & XC_i^T \\ C_i X & -X \end{bmatrix} < 0, \qquad (6)$$

$$X = X^T > 0, \quad i = 1, \ldots, N.$$

Подобные линейные неравенства повышенной размерности возникают и в других задачах теории управления, в частности, при исследовании систем с запаздыванием.

Таким образом, предполагаются следующие этапы дальнейшего исследования в данном направлении:

- Получение аналитических критериев существования решения задачи одновременной стабилизации систем вида (5).
- Получение аналитических критериев существования решения задач, приводящих к линейным матричным неравенствам повышенной размерности, в частности, к неравенству (6) в задаче одновременной стабилизации стохастических систем.

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке РФФИ (грант 02-01-00220) и федерального агентства по образованию (грант А04-2.8-947)

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ДИНАМИКИ МЕХАНИЧЕСКИХ СИСТЕМ С НЕГОЛОНОМНЫМИ СВЯЗЯМИ С ПОМОЩЬЮ УРАВНЕНИЯ ЛАГРАНЖА ВТОРОГО РОДА

Филькин Н.М.
ОАО "ИжАвто"

Уровень совершенства механической системы (машина, агрегат, узел и т.п.) во многом закладывается при анализе динамики ее конструкции. Современные информационные технологии позволяют выполнять такого типа исследования механической системы (МС) на математических моделях, которые обычно представляют собой системы дифференциальных уравнений вида:

$$[M](\ddot{X}) + [K](\dot{X}) + [C](X) = (F(t)), \quad (1)$$

где $[M]$, $[K]$, $[C]$ – соответственно матрица масс и приведенных моментов инерции, матрица коэффициентов демпфирования и матрица коэффициентов жесткостей звеньев МС; $(\ddot{X})$ – вектор ускорений обобщенных координат (количество координат равно числу степеней свободы всех рассматриваемых звеньев МС), однозначно определяющих положение всех частей МС; $(\dot{X})$ – вектор разностей скоростей обобщенных координат взаимодействующих масс МС; (X) – вектор разностей перемещений обобщенных координат взаимодействующих масс МС; $(F(t))$ – вектор функций обобщенных сил, действующих на обобщенные координаты; t – текущее время.

Для вывода системы дифференциальных уравнений вида (1) на практике широко применяется уравнение Лагранжа второго рода вида:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_k} + \frac{\partial \Pi}{\partial q_k} + \frac{\partial \Phi}{\partial \dot{q}_k} = Q_k, \quad (2)$$

где T – кинетическая энергия МС; П – потенциальная энергия МС; Ф – диссипативная функция, характеризующая уменьшение энергии с течением времени; Q_k – обобщенная сила, соответствующая k-ой обобщенной координате q_k; $\dot{q}_k$ – скорость обобщенной координаты.

Известно, что уравнение (2) справедливо для МС с голономными связями. Для исследования движения неголономной системы теоретические разделы механики требуют применения специальных уравнений, например, уравнение Аппеля или уравнений, получаемых из дифференциальных вариационных принципов механики, что затрудняет проведения анализа динамики конструкции МС. Более того, на практике многие МС могут быть как голономными, так и неголономными в зависимости от режимов работы МС. Например, у большого количества машин в трансмиссиях имеются фрикционные муфты сцепления. При работе с блокированной муфтой сцепления мы имеем голономную МС, а при ее буксовании появляется неголономная связь. В данном случае актуален вопрос о возможности применения уравнения (2) для таких неголономных систем.

При появлении подобной неголономной связи предлагается рассматривать МС как комбинацию ее двух частей с голономными связями, соединенных между собой некоторой активной силовой связью $F(\varphi, \dot{\varphi}, \ddot{\varphi})$ (рисунок). Пусть силовое взаимодействие этих частей осуществляется между выходными элементами первой части (выходной вал, ведущие детали муфты сцепления и т.п.) и входными элементами второй части МС (входной вал, ведомые детали муфты сцепления, исполнительные механизмы рабочих органов и т.п.). Силовая связь $F(\varphi, \dot{\varphi}, \ddot{\varphi})$ при математическом описании работы МС может иметь сложный характер и представлять собой сумму крутящих моментов и сил, зависящих как от обобщенных координат соединяемых элементов φ (позиционные силы, например, сила упругости), так и от их скоростей $\dot{\varphi}$ (силы сопротивления, например, демпфирования, трения и т.п.) и ускорений $\ddot{\varphi}$ (силы инерции).

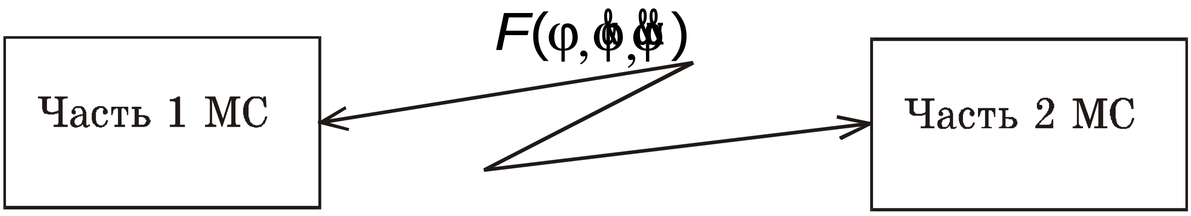

Рисунок 1. Упрощенная структурная схема МС

Схематическое разделение машины на две составляющие ее части позволяет раздельно разрабатывать математические модели различных режимов работы МС для составляющих ее частей с помощью уравнения Лагранжа второго рода (2). Система дифференциальных уравнений, описывающая работу МС в целом, получается путем простого добавления к системе дифференциальных уравнений, соответствующей первой части МС, системы уравнений, описывающей работу второй части МС, с учетом силовой связи $F(\varphi,\dot{\varphi},\ddot{\varphi})$ между обобщенными координатами соединяемых элементов этих частей машины.

В этом случае количество уравнений, описывающих движение МС, будет больше, в сравнении с применением уравнения Аппеля. Но при численных методах интегрирования на ПЭВМ систем дифференциальных уравнений типа (1) наиболее рационально иметь избыточные дифференциальные уравнения и универсальный подход к построению математических моделей МС с голономными и неголономными связями, чем применять более сложный и трудоемкий математический аппарат разработки математических моделей (систем дифференциальных уравнений) динамики МС.

МОДЕЛИРОВАНИЕ ОСЦИЛИРУЮЩЕЙ СОСТАВЛЯЮЩЕЙ ТЕМПЕРАТУРНОГО ПОЛЯ, ВОЗНИКАЮЩЕЙ В РАДИОЧАСТОТНОМ ДИАПАЗОНЕ СПЕКТРА ПОД ДЕЙСТВИЕМ ПЕРИОДИЧЕСКОГО ИМПУЛЬСНОГО ИЗЛУЧЕНИЯ ЛАЗЕРА

Якункин М.М., Артамонов А.В.
Московский институт электроники и математики, Москва

Интерес к исследованию осциллирующей составляющей температурного поля, возникающего под действием периодических d-образных источников тепла, был стимулирован необходимостью разработки методов измерения теплофизических свойств пленок и тонких фольг [1]. Одна из проблем, которые возникают при исследовании тепловых свойств плёнок и тонких фольг, связана с резким (экспоненциальным) ростом тепловой прозрачности образцов с уменьшением их толщины l. Поэтому, чтобы получить измеряемое в эксперименте затухание температурного сигнала, исследования проводят в существенно нестационарных температурных полях. В литературе описаны методы измерений основанные на нагреве синусоидальными и однокракто-импульсными источниками тепла. Эти методы разработаны для массивных образцов и их применение для плёнок встречают серьёзные трудности. Если образец не является аппаратным средством самого метода, достичь частоты колебаний при синусоидальном нагреве $w \geq 1$ kHz практически невозможно из-за резкого уменьшения амплитуды колебаний с увеличением частоты. Чтобы увеличить степень нестационарности температурного поля используют метод однократного импульсного нагрева (с длительностью импульса τ порядка долей микросекунды). Однако его применение связано с большой случайной ошибкой из-за малой величины выборки и нестабильности характеристик силового тракта при малых длительностях импульса.

До настоящего времени эти метода рассматривались как альтернативные, поскольку в одном случае предполагается использование монохроматического гармонического нагрева, в то время как в другом играет роль именно ширина спектра. В результате остались неизученными возможности метода, основанные на периодическом резонансными источниками тепла с d-образной плотностью мощности в импульсе. Наиболее разработанными источниками такого тепла являются лазеры с акустооптической регуляцией добротности резонатора. Было показано [2], что за счёт дополнительной степени свободы – коэффициента заполнения $\gamma = \tau\cdot\omega$ можно выйти в радиочастотный спектр колебаний температуры ~ 10 kHz - 1 MHz и достичь амплитуд колебания в плёнках ~ 100 K почти не меняя среднюю мощность нагрева. Тем самым представленные к разработке методы, имеют степень нестационарности характерную для однократных импульсных методов, но в то же время позволяют сохранить и в ряде случаев уменьшить погрешность измерений, достигнутую с использованием гармонического нагрева.

Моделирование воздействия такого излучения на пленки связано с решением достаточно сложной нелинейной задачи, которое удается получить численным методом при малых значениях t [3], что весьма неудобно при использовании его в эксперименте. В связи с этим в работе изучена асимптотика задачи при $t \to \infty$, получено решение для квазистационарного теплового режима $T(t,x_i) = \bar{T}(x_i) + q(t,x_i)$ и проведено математическое моделирование осциллирующей составляющей температурного поля $q(t,x_i)$ в средах с поверхностным и объёмным поглощением.

Для этого исходная нелинейная задача линеаризовалась по малому параметру q, для которого строилось аналитическое решение в виде ряда

$$q(t,x_i) = \sum_k \mathrm{Re}\left[c_k H(x_i,w_k)\exp(iw_k t)\right],$$

$w_k = 2p\,k/t_n$, представляющего собой суперпози-