

Фундаментальные и прикладные проблемы математики

**КРИТЕРИЙ СУЩЕСТВОВАНИЯ ОБЩЕЙ
КВАДРАТИЧНОЙ ФУНКЦИИ ЛЯПУНОВА
МНОЖЕСТВА ЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ ВТОРОГО
ПОРЯДКА**

Пакшин П.В., Поздьяев В.В.

Арзамасский филиал Нижегородского
государственного технического университета,
Арзамас

Многие задачи современной теории управления приводят к необходимости установления условий разрешимости системы матричных неравенств Ляпунова

$$A_i^T P + P A_i < 0, \quad P = P^T > 0, \quad i = 1, \mathbf{K}, N, \quad (1)$$

где A_i ($i = 1, \mathbf{K}, N$) — заданные квадратные матрицы размера $n \times n$. Приведем некоторые из них: задача нахождения общей функции Ляпунова линейных систем, задача анализа устойчивости системы случайной структуры при неизвестных вероятностях перехода, устойчивость систем, описываемых дифференциальными включениями. Вопрос о разрешимости системы неравенств Ляпунова играет в этих задачах такую же роль, как и вопрос о разрешимости уравнения Ляпунова при исследовании устойчивости обычных линейных систем.

Для численного решения задач подобного рода созданы эффективные программные средства. В то же время аналитические результаты в данной области крайне малочисленны по причине высокой сложности проблемы, и, к тому же, имеют ограниченное применение.

Авторами предложен подход, позволяющий получить аналитические условия существования общей функции Ляпунова для конечного множества линейных систем второго порядка. Рассмотрим множество линейных систем, описываемых стохастическими дифференциальными уравнениями Ито

$$dx = A_i x dx + C_i x dw, \quad i = 1, \mathbf{K}, N, \quad (2)$$

где $w = w(t)$ — стандартный винеровский процесс с приращениями, не зависящими от начального состояния системы. Требуется найти условия, при которых квадратичная форма $V(x) = x^T P x$ является общей стохастической функцией Ляпунова для всех систем (2). Эти условия сводятся к условиям разрешимости системы неравенств более общего вида, чем (1), относительно матрицы $P = P^T > 0$:

$$A_i^T P + P A_i + C_i^T P C_i < 0, \quad i = 1, \mathbf{K}, N. \quad (3)$$

Приведенные далее результаты относятся также и к задаче о существовании общей стохастической функции Ляпунова в виде квадратичной формы для множества дискретных систем

$$x_{k+1} = A_i x_k + C_i x_k v_k, \quad i = 1, \mathbf{K}, N, \quad k = 0, 1, \mathbf{K},$$

где v_k — стандартный дискретный гауссовский белый шум, не зависящий от начального состояния системы. Соответствующие линейные матричные неравенства имеют вид

$$A_i^T P A_i - P + C_i^T P C_i < 0, \quad i = 1, \mathbf{K}, N. \quad (4)$$

Пусть $L_i(P) < 0$, $i = 1, \mathbf{K}, m$ — линейные матричные неравенства вида (3) или (4). Пусть G_i — матрицы 3×3 из соотношения

$$-\frac{d}{dp} \det L_i(P) \equiv G_i p,$$

где $p = [p_{11} \quad p_{12} \quad p_{22}]^T$. Важную роль в приведенных далее результатах играет выпуклая линейная комбинация матриц G_i :

$$G = \sum_{i=1}^m c_i G_i, \quad c_i \geq 0, \quad \sum_{i=1}^m c_i = 1.$$

Теорема 1. Система двух или трех матричных неравенств

$$L_i(P) < 0, \quad i = 1, \mathbf{K}, m,$$

$m \in \{2, 3\}$, имеет решение $P = P^T > 0$ тогда и только тогда, когда выполняются следующие условия:

- каждое из неравенств имеет решение $P = P^T > 0$;
- не существует вырожденной выпуклой линейной комбинации матриц G_i , $i = 1, \mathbf{K}, m$.

Теорема 2. Система из более трех матричных неравенств $L_i(P) < 0$, $i = 1, \mathbf{K}, m$, $m > 3$, имеет

решение $P = P^T > 0$ тогда и только тогда, когда имеют общее решение любые три из этих неравенств.

Проверка существования вырожденной выпуклой линейной комбинации для двух или трех неравенств осуществляется с помощью следующих теорем.

Теорема 3. Если при $m = 2$ выполняется первое условие теоремы 1, то вырожденная выпуклая линейная комбинация матриц G_1 и G_2 существует тогда и только тогда, когда полином

$D(x) = \det(G_1 + x G_2)$ имеет вещественный положительный корень.

Теорема 4. Если при $m = 3$ выполняется первое условие теоремы 1, то вырожденная выпуклая линейная комбинация матриц G_1 , G_2 и G_3 существует тогда и только тогда, когда верно хотя бы одно из следующих утверждений:

- неравенства $L_2(P) < 0$ и $L_3(P) < 0$ не имеют общего решения;
- полином $D(x, y) = \det(G_1 + x G_2 + y G_3)$ имеет нули в первом квадранте $\{(x, y) \mid x \geq 0, y \geq 0\}$.

Рассмотренные задачи — это задачи анализа. Не меньший интерес представляют проблемы синтеза, в которых нужно найти закон управления, обеспечи-

вающий одновременную стабилизацию семейства систем

$$\begin{aligned} \dot{x} &= A_i x + B_i u, \quad i = 1, \mathbf{K}, N, \\ u &= Kx. \end{aligned} \quad (5)$$

В этом случае мы приходим к следующей задаче: найти матрицы $X = X^T > 0$ и Y такие, что

$$XA_i^T + Y^T B_i^T + A_i X + B_i Y < 0, \quad i = 1, \mathbf{K}, N.$$

Данная задача не является тривиальным обобщением рассмотренной выше, но есть уверенность в том, что предложенный подход позволит получить конструктивное ее решение.

Задача одновременной стабилизации стохастических систем приводит к матричным неравенствам более сложного вида:

$$\begin{bmatrix} XA_i^T + Y^T B_i^T + A_i X + B_i Y & XC_i^T \\ C_i X & -X \end{bmatrix} < 0, \quad (6)$$

$$X = X^T > 0, \quad i = 1, \mathbf{K}, N.$$

Подобные линейные неравенства повышенной размерности возникают и в других задачах теории управления, в частности, при исследовании систем с запаздыванием.

Таким образом, предполагаются следующие этапы дальнейшего исследования в данном направлении:

- Получение аналитических критериев существования решения задачи одновременной стабилизации систем вида (5).

- Получение аналитических критериев существования решения задач, приводящих к линейным матричным неравенствам повышенной размерности, в частности, к неравенству (6) в задаче одновременной стабилизации стохастических систем.

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке РФФИ (грант 02-01-00220) и федерального агентства по образованию (грант А04-2.8-947)

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ДИНАМИКИ МЕХАНИЧЕСКИХ СИСТЕМ С НЕГОЛОНОМНЫМИ СВЯЗЯМИ С ПОМОЩЬЮ УРАВНЕНИЯ ЛАГРАНЖА ВТОРОГО РОДА

Филькин Н.М.
ОАО "ИжАвто"

Уровень совершенства механической системы (машина, агрегат, узел и т.п.) во многом закладывается при анализе динамики ее конструкции. Современные информационные технологии позволяют выполнять такого типа исследования механической системы (МС) на математических моделях, которые обычно представляют собой системы дифференциальных уравнений вида:

$$[M](\ddot{x}) + [K](\dot{x}) + [C](x) = (F(t)), \quad (1)$$

где $[M]$, $[K]$, $[C]$ – соответственно матрица масс и приведенных моментов инерции, матрица коэффициентов демпфирования и матрица коэффициентов жесткостей звеньев МС; (\ddot{x}) – вектор ускорений обобщенных координат (количество координат равно числу степеней свободы всех рассматриваемых звеньев МС), однозначно определяющих положение всех частей МС; (\dot{x}) – вектор разностей скоростей обобщенных координат взаимодействующих масс МС; (x) – вектор разностей перемещений обобщенных координат взаимодействующих масс МС; $(F(t))$ – вектор функций обобщенных сил, действующих на обобщенные координаты; t – текущее время.

Для вывода системы дифференциальных уравнений вида (1) на практике широко применяется уравнение Лагранжа второго рода вида:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_k} + \frac{\partial \Pi}{\partial q_k} + \frac{\partial \Phi}{\partial \dot{q}_k} = Q_k, \quad (2)$$

где T – кинетическая энергия МС; Π – потенциальная энергия МС; Φ – диссипативная функция, характеризующая уменьшение энергии с течением времени; Q_k – обобщенная сила, соответствующая k -ой обобщенной координате q_k ; \dot{q}_k – скорость обобщенной координаты.

Известно, что уравнение (2) справедливо для МС с голономными связями. Для исследования движения неголономной системы теоретические разделы механики требуют применения специальных уравнений, например, уравнение Аппеля или уравнений, получаемых из дифференциальных вариационных принципов механики, что затрудняет проведения анализа динамики конструкции МС. Более того, на практике многие МС могут быть как голономными, так и неголономными в зависимости от режимов работы МС. Например, у большого количества машин в трансмиссиях имеются фрикционные муфты сцепления. При работе с заблокированной муфтой сцепления мы имеем голономную МС, а при ее буксовании появляется неголономная связь. В данном случае актуален вопрос о возможности применения уравнения (2) для таких неголономных систем.

При появлении подобной неголономной связи предлагается рассматривать МС как комбинацию ее двух частей с голономными связями, соединенных между собой некоторой активной силовой связью $F(\varphi, \dot{\varphi}, \ddot{\varphi})$ (рисунок). Пусть силовое взаимодействие этих частей осуществляется между выходными элементами первой части (выходной вал, ведущие детали муфты сцепления и т.п.) и входными элементами второй части МС (входной вал, ведомые детали муфты сцепления, исполнительные механизмы рабочих органов и т.п.). Силовая связь $F(\varphi, \dot{\varphi}, \ddot{\varphi})$ при математическом описании работы МС может иметь сложный характер и представлять собой сумму крутящих моментов и сил, зависящих как от обобщенных координат соединяемых элементов φ (позиционные силы, например, сила упругости), так и от их скоростей $\dot{\varphi}$ (силы сопротивления, например, демпфирования, трения и т.п.) и ускорений $\ddot{\varphi}$ (силы инерции).