УДК 530.1.076

ОБ АДДИТИВНОСТИ РАБОТ В КЛАССИЧЕСКОЙ МЕХАНИКЕ

Иванов Е.М.
Димитровградский институт технологии, управления и дизайна, Димитровград

Показано, что аддитивность (независимость) работ выполняется только для перпендикулярных сил. Работы сил, действующих по одной оси, не равна их арифметической сумме.

В физике, в разделе классической механики, используется принцип независимости механических движений. Например, при движении материальной точки в плоскости XOY траектория тела определяется как результат двух независимых движений: движения вдоль оси X и движения вдоль оси Y, и положение тела на плоскости будет определяться двумя координатами: $X(t)$ и $Y(t)$. Соответственно определяются скорости и ускорения: $V^2 = V_X^2 + V_Y^2$ и $a^2 = a_X^2 + a_Y^2$. Если движение свободного тела происходит под действием силы F, то силу можно разложить на две составляющие $F^2 = F_X^2 + F_Y^2$. Работу, совершаемую силой, направленной вдоль перемещения, можно записать в виде $A = F \cdot S$. Используя соотношения: $S = at^2/2$ и $a = F/m$, выражение для работы можно представить в следующем виде:

$$A = \frac{F^2 t^2}{2m} \quad \text{или} \quad A = \frac{I^2}{2m} \tag{1}$$

где $I = F \cdot t$ - импульс силы. Для свободного тела импульс силы передается телу в виде импульса (количества движения) тела $P = mV$, т.е. $F \cdot t = mV$. Это выражение – II закон Ньютона. Поскольку работа (1) пропорциональна квадрату силы F, то для взаимно перпендикулярных сил F_X и F_Y будет выполняться принцип аддитивности (независимости) работ: работу силы A можно представить в виде арифметической суммы работ $(A_X + A_Y) = A$:

$$A = \frac{F^2 t^2}{2m} = \frac{t^2}{2m}(F_X^2 + F_Y^2) = \frac{F_X^2 t^2}{2m} + \frac{F_Y^2 t^2}{2m} \tag{2}$$

Однако, принцип аддитивности работ не применим к силам, действующим вдоль одной координатной оси. Пусть сила F представляет собой сумму двух сил: $F = F_1 + F_2$. Запишем формально сумму работ этих сил. Не трудно убедиться на конкретных числовых значениях, что:

$$A_1 + A_2 = \frac{F_1^2 t^2}{2m} + \frac{F_2^2 t^2}{2m} \neq A = \frac{F^2 t^2}{2m} \tag{3}$$

т.е. условие аддитивности не выполняется. На самом деле работа двух сил будет равна:

$$A = \frac{F^2 t^2}{2m} = \frac{F_1^2 t^2}{2m} + \frac{F_1 F_2 t^2}{m} + \frac{F_2^2 t^2}{2m} \tag{4}$$

или

$$A = \frac{I^2}{2m} = \frac{I_1^2}{2m} + \frac{I_1 I_2}{m} + \frac{I_2^2}{2m} \tag{4a}$$

В курсах физики для определения работы, затрачиваемой на разгон (или торможение) тела, используется теорема о кинетической энергии: изменение кинетической энергии материальной точки при её перемещении между двумя положениями равна работе, совершенной при этом силой: $A = (K_1 - K_0) = m(V_1^2 - V_0^2)/2$. Рассмотрим эту задачу, используя понятия импульса силы и количества движения.

Пусть свободное тело массы m движется равномерно и прямолинейно со скоростью V_0. Требуется изменить его скорость, например, повысить до величины V_1. Для этого необходимо сообщить телу дополнительный импульс I_2 (рис. 1а). Запишем закон сохранения импульса:

$$\bar{I}_1 = \bar{I}_0 + \bar{I}_2 \tag{5}$$

Формально запишем закон сохранения энергии (работ):

$$\frac{I_1^2}{2m} = \frac{I_0^2}{2m} + \frac{I_2^2}{2m} \tag{6}$$

Однако нетрудно убедиться простым численным расчетом, что закон сохранения энергии в таком виде ошибочен вследствие неаддитивности работ.

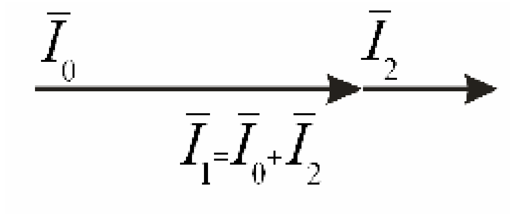

Рисунок 1*а*. Закон сохранения импульса

Поскольку вектора $\bar{I}_0$ и $\bar{I}_2$ лежат на одной прямой, то закон сохранения импульса (5) трактуют как алгебраическую сумму $I_1 = I_0 + I_2$. Перепишем (5) из векторной формы в алгебраическую, используя теорему косинусов (рис. 1б):

$$I_1 = I_0 + I_2 - 2I_0 I_2 \cos b \qquad (7)$$

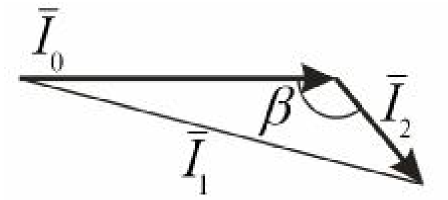

Рисунок 1*б*. Преобразование из векторной формы в алгебраическую закона сохранения импульса

Для нашего случая угол $b = p$ и $\cos p = -1$. Тогда вместо (7) получим:

$$I_1^2 = I_0^2 + I_2^2 + 2I_0 I_2 \qquad (8)$$

Разделив это выражение на удвоенную массу, получим закон сохранения энергии (работ):

$$\frac{I_1^2}{2m} = \frac{I_0^2}{2m} + \frac{I_2^2}{2m} + \frac{I_0 I_2}{m} \qquad (9)$$

Или в таком виде:

$$K_1 = K_0 + K_2 + 2\sqrt{K_0 K_2} \qquad (9а)$$

Последний член:

$$\frac{I_0 I_2}{m} = 2\sqrt{K_0 K_2} = \frac{2mV_0 V_2}{2} = \frac{2mV^2}{2}$$

где $V^2 = \left(\sqrt{V_0 V_2}\right)^2$ – квадрат среднегеометрической величины скорости, $2m$ - удвоенная масса при переходе из одной инерциальной системы (V_0) к другой (V_1).

Из уравнений (9) и (9а) найдем работу разгона (торможения):

$$A = K_1 - K_0 = K_2 + 2\sqrt{K_0 K_2}) = \frac{I_2^2}{2m} + \frac{I_0 I_2}{m} \qquad (10)$$

А теперь рассмотрим случай, когда тело массы m под действием горизонтальной силы F начинает движение по шероховатой поверхности (коэффициент трения скольжения m). Сила трения $F_{TP} = mmg$. Силу тяги можно представить в виде суммы: $F = F_{TP} + F_a$, где сила $F_a = F - F_{TP}$ в соответствии со II законом Ньютона вызывает ускоренное движение тела: $a = F_a / m$. Во всех курсах физики работу силы тяги представляют в следующем виде:

$$A = F \cdot S = F_{TP} \cdot S + F_a \cdot S =$$

$$= A_{TP} + A_a = \frac{1}{2} mmgF_a t^2 + \frac{F_a^2 t^2}{2m} \qquad (11)$$

Однако это выражение неверно, так как для сил, действующих вдоль одной оси, не выполняется принцип аддитивности работ. Запишем векторную сумму импульсов сил: $\bar{I} = \bar{I}_a + \bar{I}_{TP}$, где $I = F \cdot t$, $I_a = F_a \cdot t$, $I_{TP} = F_{TP} \cdot t$. Векторную сумму запишем в алгебраической форме (в общем случае надо использовать теорему косинусов):

$$F^2 \cdot t^2 = F_a^2 \cdot t^2 + 2F_a F_{TP} t^2 + F_{TP}^2 \cdot t^2$$

Разделив все члены равенства на $2m$, получим:

$$\frac{F^2 \cdot t^2}{2m} = \frac{F_a^2 \cdot t^2}{2m} + \frac{F_a F_{TP} t^2}{m} + \frac{F_{TP}^2 \cdot t^2}{2m} \qquad (12)$$

или

$$A = A_a + A_{УТ} + A_{TP} \qquad (12а)$$

где $A = (F \cdot t)^2 / 2m = I^2 / 2m$ – суммарная работа силы тяги, $A_a = (F_a \cdot t)^2 / 2m = I_a^2 / 2m$ - работа, затрачиваемая на увеличение кинетической энергии, $A_{TP} = (F_{TP} \cdot t)^2 / 2m = \frac{1}{2} m^2 mg^2 t^2$ - работа, затрачиваемая на преодоление силы трения при равномерном движении, $A_{УТ} = (F_a F_{TP} \cdot t^2) / m = mmF_a t^2$ - работа силы трения при ускоренном движении.

Автором в работах [1-3] была определена работа центростремительных и гироскопических сил. Определим её с помощью принципа аддитивности работ, совершаемых ортогональными силами F_X и F_Y (рис.2).

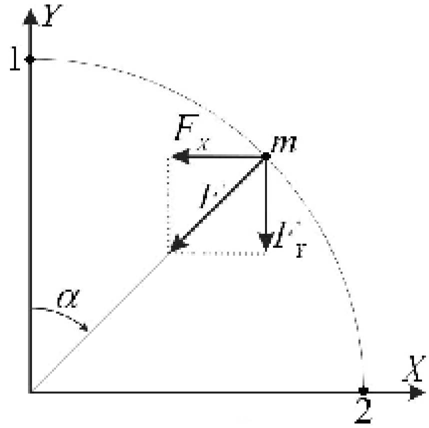

Рисунок 2. Принцип аддитивности работ, совершаемых ортогональными силами F_X и F_Y

Пусть материальная точка m равномерно движется по окружности под действием центростремительной силы $F = mV^2 / R$. Угол поворота $a = wt$, где $w = V / R$ или $w = 2p / T$, T - период вращения. Силу F раскладываем на две составляющие: $F_X = F \cos wt$ и $F_Y = F \sin wt$. Найдем импульсы этих сил:

$$I_X = \int_0^t F \cos wt dt = \frac{F}{w} \sin wt ;$$

$$I_Y = \int_0^t F \sin wt dt = \frac{F}{w}(1 - \cos wt) ;$$

$$I^2 = I_X^2 + I_Y^2 = \frac{2F^2}{w^2}(1 - \cos wt) = 2m^2V^2(1 - \cos wt)$$

Работа, совершаемая силой F, будет равна:

$$A = \frac{I^2}{2m} = mV^2(1 - \cos wt) = 2K(1 - \cos wt) \quad (13)$$

Т.е. получили то же самое выражение, что и в работах [1-3]. Для четверти окружности $t = T / 4$ и работа $A_{p/2} = 2K$, аналогично $A_p = 4K$, $A_{2p} = 8K$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Иванов Е.М. Работа центростремительных и гироскопических сил //Вестник ДИТУД. - 2003. - №1.
2. Иванов Е.М. Дополнительные главы классической механики. Димитровград, ДИТУД УлГТУ, 2004.
3. Иванов Е.М. Работа центростремительных и гироскопических сил //Успехи современного естествознания. - №9. - 2004.

ABOUT THE INDEPENDENCE OF WORKS IN THE CLASSIC MECHANICS

Ivanov E.M.
Dimitrovgrad institute of technology, management and design, Dimitrovgrad

The independence of works executes only for perpendicular powers. The work of powers? Which act on the same axis, is not equal their arithmetical sum.