циально-экономических явлений, которые в современных условиях характеризуются сложностью, неопределенностью, многокритериальностью, несовпадением интересов участвующих сторон и требуют специального математического аппарата, пригодного для их исследования. В этой связи в последнее время наблюдается всплеск интереса к теории игр и значительное возрастание ее роли. Область применения теории игр постоянно расширяется, так как она позволяет решить большое количество разнообразных задач, возникающих в политике, экономике, военном деле, построить игровые модели принятия решений в планировании, прогнозировании, технике, экологии, медицине.

Постановка и решение задач в игровой форме уже давно практикуется математиками, но сравнительно новым направлением в теории игр являются коалиционные игры. Интерес к данному типу игр вызван тем, что многие политические, социальные и экономические системы имеют коалиционную структуру.

В работе рассмотрена статическая игра двух коалиций (в каждой – по два игрока). Внутри коалиции разворачивается кооперативная игра, т.е. игроки, совещаясь, принимают совместные решения, стараясь получить как можно больший суммарный выигрыш. Между коалициями используется равновесие по Нэшу. Учет неопределенностей производится на основе принципа Джоффриона. Установлены свойства решений. Получены достаточные условия оптимальности в квадратичной игре. Приведены примеры.

ГЕОДЕЗИЧЕСКИЕ ОТОБРАЖЕНИЯ ПРОСТРАНСТВ ЛИНЕЙНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ С РУЧЕНИЯМИ

Ферзалиев А.С.
Дагестанский Государственный Технический Университет, Махачкала

В работе впервые рассматривается геодезические отображения пространств линейных элементов в терминах присоединенных связностей с кручениями. Пусть $A_{x,p}$ является пространством линейных элементов с формой связности $W^a_b = L^a_{bg}dx^g + C^a_{bg}d\,p^g$. С помощью аффинной связности $L^a_{bg}(x,p)$, тензора $C^a_{bg}(x,p)$ и скалярной функции $F(x,p)$ в $A_{x,p}$ можно ввести следующие объекты присоединенной связности [1], [2]

$$\Phi^a_{bg} = L^a_{bg} + FC^a_{bg}, \mathrm{H}^a_b = Fd^a_b - \Phi^a_{tb}p^t \quad (1)$$

и аффинные пути (обобщенные геодезические кривые)

$$c:\begin{cases}\ddot{x}^a + \Lambda^a_{bg}\dot{x}^b\dot{x}^g = m\dot{x}^a + n\,p^a\ ,\\ \dot{p}^a - H^a_b\dot{x}^b = h\,p^a,\ \Lambda^a_{bg} = \Phi^a_{(bg)}\ .\end{cases}$$

Пусть $\overline{A}_{x,p}$ некоторое другое пространство линейных элементов с формой связности $W^a_b = \overline{L}^a_{bg}dx^g + \overline{C}^a_{bg}d\,p^g$. В $\overline{A}_{x,p}$, подобно (1), также можно ввести объекты присоединенной связности $\overline{\Phi}^a_{bg}(x,p)$, $\overline{H}^a_b(x,p)$ и аффинные пути

$$\overline{c}:\begin{cases}\ddot{x}^a + \overline{\Lambda}^a_{bg}\dot{x}^b\dot{x}^g = \overline{m}\,\dot{x}^a + \overline{n}\,p^a\ ,\\ \dot{p}^a - \overline{H}^a_b\dot{x}^b = \overline{h}\,p^a, \overline{\Lambda}^a_{bg} = \overline{\Phi}^a_{(bg)}\ .\end{cases}$$

Если пространство $\overline{A}_{x,p}$ отображается на пространство $A_{x,p}$ с сохранением формы дифференциальных уравнений аффинных $\overline{c}$ и c - путей, то получим следующие преобразования:

$$\overline{\Lambda}^a_{bg} = \Lambda^a_{bg} + d^a_b q_g + d^a_g q_b + p^a a_{bg}\ , \quad (6)$$

$$\overline{H}^a_b = H^a_b + b_b\,p^a\ , \quad (7)$$

где $q_a(x,p)$, $b_a(x,p)$ - ковекторы, $a_{bg}(x,p)$ - тензор, причем $q_a(x,lp) = q_a(x,p)$, $b_a(x,lp) = b_a(x,p)$, $a_{bg}(x,lp) = l^{-1}a_{bg}(x,p)$, $a_{bg} = a_{gb}$.

Равенство (6), (7) являются основными уравнениями геодезических отображений аффинных c, $\overline{c}$ - путей пространств линейных элементов $A_{x,p}$, $\overline{A}_{x,p}$ с кручениями.

Из равенств (6), (7), используя строения объектов (1), находим преобразование для тензора $\Omega^a_{tg}p^t\ (\Omega^a_{bg} = \Phi^a_{[bg]},\ j = \overline{F} - F)$

$$\overline{\Omega}^a_{tg}p^t = \Omega^a_{tg}p^t + (j - q_t p^t)d^a_g - -(b_g + q_g + a_{gt}p^t)p^a\ , \quad (8)$$

- являющиеся следствием (6), (7). Свертка (8) с p^g приводит к условию

$$j = 2q_r p^r + b_r p^r + a_{gr}p^g p^r\ .$$

Если связности отображаемых пространств без кручений, то

$$j = q_t p^t,\ b_a + q_a + a_{at}\ p^t = 0\ , \quad (9)$$

Следующие равенства:

$$\Lambda^a_{bg} = \Gamma^a_{bg} - 2d^a_{(b}q_{g)} - p^a a_{bg}\ , (10)$$

$$H^a_b = h^a_b - p^a b_b\ ,\ h^a_b = г^a_{rb}p^r\ , (11)\quad (2)$$

(3)

характеризуют проективно точечные пространства линейных элементов, где $\mathcal{Z}^{a}_{b\,g}(x)$ - объект аффинной связности с кручением, зависящей только от координат точки $\mathrm{M}(x)$, $\Gamma^{a}_{bg} = \mathcal{Z}^{a}_{(bg)}$. Из (10), (11), при $\overset{*}{\mathcal{Z}}{}^{a}_{bg} = 0$, получим связность проективно точечных пространств линейных элементов с кручениями.

Если $p^{a} = \dot{x}^{a}$ - опорный касательный псевдовектор, то получим уравнение геодезических

$$\Gamma: \ddot{x}^{a} + \Phi^{a}_{bg}\dot{x}^{b}\dot{x}^{g} = x\,\dot{x}^{a}, \qquad (12)$$

пространства линейных элементов $B_{x,\dot{x}}$, где $\Phi^{a}_{bg}(x,\dot{x})$ - присоединенная аффинная связность без кручения.

Следующее преобразование

$$\overline{\Phi}^{a}_{bg} = \Phi^{a}_{bg} + 2d^{a}_{(b}q_{g)} + \dot{x}^{a}a_{bg} + \mathrm{M}^{a}_{bg} \qquad (13)$$

сохраняет форму дифференциальных уравнений аффинных Г - путей, где $\mathrm{M}^{a}_{bg}\dot{x}^{b}\dot{x}^{g} = 0$, $\mathrm{M}^{a}_{bg}(x, l\dot{x}) = \mathrm{M}^{a}_{bg}(x,\dot{x})$.

Формула (13) через объекты связности Картана-Лаптева можно записать так

$$\overline{L}^{a}_{(bg)} + \overline{F}\,\overline{C}^{a}_{(bg)} = L^{a}_{(bg)} + F\,C^{a}_{(bg)} + 2d^{a}_{(b}q_{g)} + \\ + \dot{x}^{a}a_{bg} + \mathrm{M}^{a}_{bg} \qquad ,(14)$$

где $\overline{C}^{a}_{bg}\dot{x}^{g} = 0$, $C^{a}_{bg}\dot{x}^{g} = 0$. Равенство (13), (14) являются однородными нулевого измерения относительно $\dot{x}^{a}$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Ферзалиев А.С.* О связностях, индуцированных объектами Картана – Лаптева // Publ. Math. Debrecen, 1990, Т.37. Fase. 1-2. P.115 - 120.
2. *Ферзалиев А.С.* Пространство линейных элементов присоединенной связности // Изв. вузов. Сер. Математика, 1988, №10, С.55-64.

КВАНТОВАНИЕ РЕШЕНИЙ ОДНОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ВТОРОГО ПОРЯДКА

Флоринский В.В., Чеканов Н. А.
Белгородский государственный университет, Белгород

Рассмотрим гамильтонову функцию одномерной системы

$$H(x,p) = \frac{p^2}{2} + \frac{x^2}{2} + a\,x^4, \qquad (1)$$

где x и p – канонически сопряженные переменные, a – малый параметр ($a \ll 1$). Уравнения движения данной системы можно свести к одному дифференциальному уравнению второго порядка:

$$\ddot{x} + x + 4a\,x^3 = 0, \qquad (2)$$

которое называется уравнением Дюффинга [1]. Методом Линдштедта-Пуанкаре [2] получаем решение уравнения (2) в первом порядке по a

$$x(t) = a\cos(wt + j_0) + \frac{1}{8}a\,a^3\cos 3\cdot \\ \cdot(wt + j_0), \qquad (3)$$

$$w = 1 + \frac{3}{2}a\,a^2, \qquad (4)$$

j_0 и a – произвольные постоянные, зависящие от начальных условий, которые без потери общности выберем в виде $x(0) = -x_E$, $\dot{x}(0) = 0$. Через $\pm x_E$ обозначены корни уравнения

$$V(x) = E, \qquad (5)$$

где $V(x) = \frac{1}{2}x^2 + a\,x^4$ – потенциальная функция системы (1), E – полная энергия.

$$\begin{cases} a\cos j_0 + \frac{1}{8}a a^3 \cos 3j_0 = -x_E, \\ a\sin j_0 + \frac{3}{2}a a^3\left(\sin j_0 + \frac{1}{4}\sin 3j_0\right) = 0, \end{cases}$$

Для определения постоянных интегрирования получаем следующую систему из которой находим, что $j_0 = 0$ и $a = x_E\left(1 - \frac{1}{8}x_E^4 a\right)$.

Заметим, что произвольную постоянную a при таком выборе начальных условий можно выразить через полную энергию E. Второе слагаемое в скобках в последнем выражении для a является величиной пятого порядка малости по a, и в рассматриваемом приближении им можно пренебречь. Таким образом, можно считать, что $a = x_E$ и рассматривать a как корень уравнения (5). Подставив a в выражение (5), и разрешив полученное уравнение методом итераций, найдем выражение a через E

$$x(t) = a\cos wt + \frac{1}{8}a\,a^3\cos 3wt.$$

$a^2 = 2E - 9aE^2$. В итоге решение (3) в первом порядке по a примет вид

$$4\int_0^{\frac{p}{2w}} \dot{x}^2(t)\,dt = h\left(n + \frac{1}{2}\right), \quad n = 1, 2, \mathbf{K},$$

Произведем квантование полученных периодических решений уравнения Дюффинга, отобрав из них те, которые удовлетворяют условию

где h – постоянная Планка.

$$p\left(2E - 9aE^2\right) = h\left(n + \frac{1}{2}\right).$$

Подставив частоту (4), а также выражения для $\dot{x}^2(t)$ и $a^2 = 2E - 9aE^2$ в условие квантования, получим

Квантовый аналог гамильтоновой функции (1) получится при помощи известной подстановки