УДК 538.4

КОНВЕКЦИЯ СМЕСЕЙ В МАГНИТНОМ ПОЛЕ

Тактаров Н.Г.
Саранский кооперативный институт, Саранск, Россия

Получены уравнения конвекции и конвективной диффузии двухкомпонентных смесей в магнитном поле. Исследованы различные частные случаи. Решена задача о конвективном движении смеси вблизи вертикальной пластины, на поверхности которой происходит гетерогенная химическая реакция. Библиогр. 4 назв.

1. Вывод уравнений конвекции намагничивающихся смесей. Уравнения движения двухкомпонентных неэлектропроводных смесей в магнитном поле имеют вид [2,3]:

$$\rho \frac{d\bar{v}}{dt} = -\nabla p + \eta \Delta \bar{v} + \left(\frac{\eta}{3} + \zeta\right) \nabla div \bar{v} + \frac{\mu}{4\pi} \left(\bar{H} \nabla\right) \bar{H} + $$
$$+ \rho \bar{g},$$
$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + div \rho \bar{v} = 0, \quad \rho \left(\frac{\partial c}{\partial t} + \bar{v} \nabla c\right) = -div \bar{I},$$
$$T\left[\frac{\partial r S_m}{\partial t} + \nabla\left(r S_m \bar{v}\right)\right] = -div \bar{q} + \left(x_1 - x_2\right) div \bar{I},$$
$$rot \bar{H} = 0, \quad div\, \mu \bar{H} = 0. \qquad (1.1)$$

Здесь $\bar{v}$ - скорость смеси, r - плотность смеси, c - концентрация первого компонента $\left(c = r_1 / r_2\right)$, S_m - энтропия единицы массы смеси, T - температура, x_1 и x_2 - химические потенциалы единицы массы для первого и второго компонентов соответственно, p - давление смеси, h и z - коэффициенты вязкости смеси, $\bar{q}$ - вектор потока тепла, $\bar{I}$ - вектор потока диффузии первого компонента, $m = m\left(r, c, T, \bar{H}\right)$ - магнитная проницаемость смеси, $\bar{H}$ - магнитное поле, $\bar{g}$ -ускорение свободного падения. Имея в виду вывод уравнений конвекции, вязкой диссипацией в уравнении притока тепла пренебрегаем [1]. Давление p в уравнении (1.1) записывается в виде:

$$p = P + \frac{1}{4p} \int_0^H \left[m - r\left(\frac{\partial m}{\partial r}\right)_{C,T,H}\right] \bar{H} d\bar{H}, \qquad (1.2)$$

где P - давление в отсутствие магнитного поля при заданных значениях плотности, температуры и концентрации. Выражение для потоков $\bar{I}$ и $\bar{q}$ [1,2]:

$$\bar{I} = T L_{11} \nabla\left(x_1 - x_2\right) + T L_{12} \nabla T, \qquad (1.3)$$
$$\bar{q} = T^2 L_{21} \nabla\left(x_1 - x_2\right) + T^2 L_{22} \nabla T + \left(x_1 - x_2\right) \bar{I}.$$

Здесь $L_{ab}\left(\bar{H}\right) = L_{ba}\left(-\bar{H}\right)$ - кинетические коэффициенты, связанные между собой соотношениями взаимности Онзагера.

Запишем тождество Гиббса для намагничивающихся смесей [2]:

$$d\tilde{G}_m = -S_m dT + x\, dc + \frac{1}{r} dp - \frac{m\bar{H}}{4pr} d\bar{H}. \qquad (1.4)$$

Здесь $\tilde{G}_m$ - потенциал Гиббса, приходящийся на единицу массы среды, $x = x_1 - x_2$; в качестве независимых термодинамических переменных в тождестве (1.4) выбраны c, p, T, $\bar{H}$. Выражение для $\nabla x\left(c, p, T, H\right)$ имеет вид:

$$\nabla x = \left(\frac{\partial x}{\partial c}\right)_{p,T,H} \nabla c + \left(\frac{\partial x}{\partial T}\right)_{p,c,H}$$
$$\nabla T + \left(\frac{\partial x}{\partial p}\right)_{c,T,H} \nabla p + \left(\frac{\partial x}{\partial H}\right)_{c,p,T} \nabla H. \qquad (1.5)$$

Здесь $H = \left|\bar{H}\right|$; среда предполагается изотропной.

Далее ограничимся случаем несжимаемой среды, уравнение неразрывности будем писать в виде $div\, \bar{v} = 0$. Из первой формулы (1.1) следует, что в состоянии равновесия выполняется условие:

$$\nabla p = \frac{1}{4\pi} \mu \left(\bar{H} \nabla\right) \bar{H} + \rho \bar{g}. \qquad (1.6)$$

Подставляя формулу (1.6) в (1.5) будем иметь:

$$\nabla x = x_c \nabla c + x_T \nabla T - \frac{1}{8pr_0} m_c \nabla H^2 -$$
$$- \frac{1}{r_0} r_c \bar{g}. \qquad (1.7)$$

Здесь $m = m\left(c, p, T, H\right)$; $x_c = \left(\partial x / \partial c\right)_{p,T,H}$; $x_T = \left(\partial x / \partial T\right)_{c,p,H}$; $m_c = \left(\partial m / \partial c\right)_{p,T,H}$; $r_c = \left(\partial r / \partial c\right)_{p,T,H}$.

Аналогично (1.7) записывается уравнение для энтропии:

$$\nabla S_m = -x_T \nabla c + \frac{l}{T_0}\nabla T + \frac{m_T}{8pr_0}\nabla H^2 +$$
$$+\frac{r_T}{r_0}\bar{g}. \qquad (1.8)$$

Здесь $r_T = (\partial r/\partial T)_{c,p,H}$; $m_T = (\partial m/\partial T)_{c,p,H}$; $l = l_{c,p,H}$ - удельная теплоемкость при постоянном давлении, концентрации и магнитном поле.

Будем считать, что отклонения величин от некоторых средних значений малы, поэтому в формулах (1.7) и (1.8) и далее коэффициенты при $\nabla c, \nabla T, \nabla H^2, \bar{g}$ будем считать постоянными величинами, соответствующими некоторым средним значениям концентрации c_0, температуры T_0 и магнитного поля $\langle \bar{H} \rangle$. Выражение для потоков $\bar{I}$ и $\bar{q}$ принимают вид:

$$\bar{I} = -r_0 D\left(\nabla c + a\nabla T + k_H \nabla H^2 + k_g \bar{g}\right),$$
$$\bar{q} = -(x + aDN')\nabla T - DN'\nabla c - k_H DN'\nabla H^2 -$$
$$-k_g DN'\bar{g}. \qquad (1.9)$$

В формулах (1.9) вместо кинетических коэффициентов L_{11}, L_{12}, L_{22} введены другие параметры:

коэффициент диффузии:

$$D = -\frac{1}{r_0} T_0 L_{11} x_c,$$

коэффициент теплопроводности:

$$x = T_0^2 L_{11}^{-1}\left(L_{12}^2 - L_{22}L_{11}\right),$$

термодиффузионное отношение:

$$k_T = \left(L_{11}x_c\right)^{-1}\left(T_o L_{11} x_T + T_0 L_{12}\right),$$

а также следующие параметры:

$$a = k_T/T_0,\ N' = r_0 L_{11}^{-1}(T_0 L_{12} + L_{11}x),\ k_H =$$
$$= (m_0 a_c)/(8pr_0 x_c),\ k_g = b_c/x_c;$$

где

$$a_c = -m_0^{-1}(\partial m/\partial c)_{T,p,H};\ b_c = -r_0^{-1}(\partial r/\partial c)_{T,p,H};$$

m_0 и r_0 - постоянные средние значения магнитной проницаемости и плотности. Все коэффициенты при градиентах в формулах (1.9) предполагаются постоянными.

Подставляя формулы (1.9) в третье и четвертое уравнение системы (1.1), будем иметь:

$$\frac{\partial c}{\partial t} + \bar{v}\nabla c = D\Delta c + aD\Delta T + k_H D\Delta H^2,$$
$$\frac{\partial T}{\partial t} + \bar{v}\nabla T - \frac{m_0 a_T T_0}{8pr_0 l}\left(\frac{\partial H^2}{\partial t} + \bar{v}\nabla H^2\right) -$$
$$-\frac{T_0 b_T}{l}(\bar{v}\bar{g}) = \left[c + a^2 DN\right]\Delta T +$$
$$+ aDN\Delta c + ak_H DN\Delta H^2. \qquad (1.10)$$

Здесь $b_T = -r_0^{-1}(\partial r/\partial T)_{c,p,H}$; $c = k/r_0 l$ - коэффициент температуропроводности; $a_T = -m_0^{-1}(\partial m/\partial T)_{c,p,H}$;

$$N = \left(r_0 l k_T\right)^{-1}\left(T_0 N' - r_0 x T_0 + r_0 T_0^2 x_T\right).$$

В уравнении притока тепла слагаемое, содержащее $\partial H^2/\partial t$, надо учитывать в случае переменного магнитного поля, например, в задачах, в которых в качестве модулируемого параметра берется магнитное поле.

Найдем теперь необходимые условия равновесия среды. Взяв *rot* от обеих частей уравнения (1.6), будет иметь вид:

$$\frac{1}{8p}\left[\left(\frac{\partial m}{\partial c}\right)_{T,p,H}\nabla c + \left(\frac{\partial m}{\partial p}\right)_{c,T,H} r\bar{g} +\right.$$
$$\left.+\left(\frac{\partial m}{\partial T}\right)_{c,p,H}\nabla T\right]\times\nabla H^2 +$$
$$+\left[\left(\frac{\partial r}{\partial T}\right)_{c,p,H}\nabla T + \left(\frac{\partial r}{\partial c}\right)_{T,p,H}\nabla c\right]\times\bar{g} = 0. \quad (1.11)$$

Из формулы (1.11) следует, что механическое равновесие в среде возможно в случае когда $(\partial m/\partial p)_{c,T,H} = 0,\ T = const,\ c = const$, либо в случае, когда векторы $\nabla c, \nabla T, \nabla H^2, \bar{g}$ параллельны. Возможны и другие случаи равновесия, когда эти векторы не обязательно вертикальны, но выбраны так, что выполняется условие (1.11). Далее ограничимся случаем, когда векторы $\nabla c, \nabla T, \nabla H^2, \bar{g}$ вертикальны.

Линеаризуя уравнения (1.1) и (1.10) по малым конвективным возмущениям и предполагая, что $(\partial m/\partial H)_{c,p,T} = 0$, имеем:

$$r_0\frac{d\bar{v}}{dt} = -\nabla p' + h_0\Delta\bar{v} - \frac{m_0}{8p}(a_c c' + a_T T')\bar{G} -$$
$$- r_0(b_c c' + b_T T')\bar{g};\ div\bar{v} = 0;$$
$$\frac{\partial c'}{\partial t} + \bar{v}\nabla c' = DDc' + aDDT';$$

$$\frac{\partial T'}{\partial t} + \bar{v}\nabla T' - \frac{m_0 a_T T_0}{8pr_0 l}(\bar{v}\bar{G}) - \frac{b_T T_0}{l}(\bar{v}\bar{g}) =$$
$$= \left[c + a^2 DN\right]\Delta T' + aDN\Delta c'. \qquad (1.12)$$

Здесь $\bar{G} = \nabla H^2$ градиент магнитного поля, предполагаемый постоянной заданной величиной; c', T' - отклонения концентрации и температуры от постоянных средних значений c_0 и T_0.

В случае $\overline{G} = const$ из уравнений (1.11), (1.12) следует, что необходимым условием равновесия является постоянство и вертикальность градиентов температуры и концентрации:

$$\nabla T' = -A\overline{k}, \ \nabla c' = -B\overline{k}. \quad (1.13)$$

Здесь $\overline{k}$ - единичный вектор, направленный вверх вдоль оси z.

Отметим, что вышеприведенные уравнения при отсутствии магнитного поля совпадают с уравнениями работы [1].

Магнитное поле в среде можно записать в виде $\overline{H} = \overline{H}_0 + \overline{H}'$, где $\overline{H}_0$ - поле при $c_0 = const,\ T_0 = const,\ m_0 = const$; $\overline{H}'$ - возмущение. Так что $\overline{G} = \overline{G}_0 + \overline{G}'$, где $\overline{G}_0 = \nabla H_0^2$, $\overline{G}' = 2\nabla\left(\overline{H}_0\overline{H}'\right)$; величину $\overline{G}$ можно считать заданной при выполнении условия $G_0 >> G'$.

2. Уравнения конвективной диффузии. Интерес для приложений представляет случай когда температуру вдоль смеси можно считать постоянной. Конвективная диффузия несжимаемой смеси описывается первым уравнением системы (1.1) и первым уравнением (1.10), а также уравнением неразрывности $div\,\overline{v} = 0$ и уравнениями магнитного поля. Для решения конкретных задач необходимо также задавать соответствующие граничные условия на поверхности полости с жидкостью. Вектор потока диффузии в случае $T = const$ имеет вид:

$$\overline{I} = -r_0 D\left(\nabla c + k_H \nabla H^2 + k_g \overline{g}\right) \quad (2.1)$$

Далее будем предполагать выполненным условие $k_g g << k_H \left|\nabla H^2\right|$ и пренебрегать в формуле (2.1) слагаемым, связанным с полем тяжести. Движение смеси при отклонении концентрации от постоянного среднего значения описываются уравнением:

$$r_0\left[\frac{\partial\overline{v}}{\partial t} + (\overline{v}\nabla)\overline{v}\right] = -\nabla p' + h_0\Delta\overline{v} - \frac{m_0 a_c c'}{8p}\overline{G}_0 +$$

$$+\frac{m_0}{8p}\overline{G}' - r_0 b_c c'\overline{g}. \quad (2.2)$$

В уравнении (2.2) в отличие от уравнения (1.12) учитывается градиент магнитного поля $\overline{G}'$, индуцированный неоднородностью концентрации. Вводя потенциал магнитного поля $j'\left(\overline{H}' = -\nabla j'\right)$, из последних двух уравнений (1.1) имеем:

$$\Delta j' + a_c(\nabla c')\overline{H}_0 - a_H\nabla\left(\overline{h}\nabla j'\right) = 0. \quad (2.3)$$

Здесь $a_H = -m_0^{-1}(\partial m/\partial H)_{c,p,T}$, $\overline{h} = \overline{H}_0/H_0$.

Полагая $a_H = 0,\ \nabla c' = -B\overline{k},\ \overline{H}_0 = H_0\overline{k}\left(\overline{H}_0 = const\right)$, из формулы (2.3) находим:

$$\Delta j' = a_c B H_0. \quad (2.4)$$

Если геометрия задачи такова, что j' зависит только от z (z - вдоль вектора $\overline{k}$), из уравнения (2.4) следует:

$$G' = 2\left|\nabla\overline{H}_0\overline{H}'\right| = 2H_0\left|Ba_c\right|.$$

Отсюда следует, что влияние градиента концентрации на магнитное поле надо учитывать в случае больших значений *B*.

Приведем к безразмерному виду стационарное уравнение конвективной диффузии:

$$\overline{v}\nabla c = D\Delta c + k_H D\Delta H^2. \quad (2.5)$$

Введем в рассмотрение L_c - характерное расстояние, на котором происходит существенное изменение концентрации, L_H - характерное расстояние для градиента магнитного поля *G*, V_0 - характерную скорость, G_0 - характерный градиент магнитного поля. Обозначая безразмерные величины теми же буквами что и размерные, уравнение (2.5) можно записать в виде:

$$\overline{v}\nabla c = Pe^{-1}\Delta c + gPe^{-1}div\overline{G}. \quad (2.6)$$

Здесь $Pe = V_0 L_c/D$ - число Пекле, $g = k_H G_0 L_c^2/L_H$.

Если $g << 1$, влиянием магнитного поля на диффузию можно пренебречь. При выполнении условия $Pe << 1$ надо отбросить левую часть уравнения (2.6) и затем приравнять к нулю правую. Распределение концентрации в этом случае определяется уравнением:

$$Dc + g\,div\overline{G} = 0.$$

Рассмотрим теперь задачу о конвективном движении смеси вблизи полубесконечной вертикальной пластины, на поверхности которой происходит гетерогенная изотермическая реакция. Предполагая скорость реакции бесконечно большой, запишем граничное условие для концентрации $c = 0$ на поверхности пластины (предполагается, что реагирует первая компонента).

Концентрацию вдали от пластины обозначим через c_0. Будем считать, что заметное изменение концентрации происходит в тонком слое вблизи пластины, так что течение имеет вид пограничного слоя. Движение жидкости вдоль пластины происходит под действием поля тяжести и градиента магнитного поля. Пренебрегая индуцированным градиентом магнитного поля, запишем уравнения движения в приближении стационарного пограничного слоя [4]:

$$v_x \frac{\partial v_z}{\partial x} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} = n \frac{\partial^2 v_z}{\partial x^2} + gc'\left[b_c - \frac{m_0 a_c}{8pr_0 g} G_{0z}\right];$$

$$v_x \frac{\partial c'}{\partial x} + v_z \frac{\partial c'}{\partial z} = D \frac{\partial^2 c'}{\partial x^2};$$

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0. \qquad (2.7)$$

Здесь z - координата вверх вдоль пластины, x - перпендикулярно к пластине; нижней кромке пластины соответствует $z = 0; n = h_0 / r_0; c' = c - c_0;$ G_{0z} - компонента градиента поля.

Граничные условия:

$$v_x = v_z = 0,\ c' = -c_0 \text{ при } x = 0;$$

$$v_z = 0,\ c' = 0 \text{ при } x \to \infty.$$

В работе [4] показано, что система (2.7) может быть приведена к обыкновенным дифференциальным уравнениям. Распределение концентрации имеет вид:

$$c = 0{,}7\,\mathrm{Pr}^{1/4}\left[\frac{1}{4n^2}\left(\frac{m_0 a_c G_{0z}}{8pr_0} - b_c g\right)\right]^{1/4} \times$$

$$\times \frac{x c_0^{5/4}}{z^{1/4}}. \qquad (2.8)$$

Здесь $Pr = n/D$ - число Прандтля, предполагается что число Прандтля велико [4]. Из формул (2.1) и (2.8) следует, что плотность потока диффузии на пластину равна:

$$I_n = \bar{I}\,\bar{n} = 0{,}7\,r_0 D\,\mathrm{Pr}^{1/4}\left[\frac{1}{4n^2} \times\right.$$

$$\left.\times\left(\frac{m_0 a_c G_{0z}}{8pr_0} - b_c g\right)\right]^{1/4} \times \frac{c_0^{5/4}}{z^{1/4}} + r_0 k_H D G_{0x},$$

где G_{0x} - компонента градиента магнитного поля, $\bar{n}$ - нормаль, направленная внутрь пластины. Таким образом, при помощи магнитного поля можно управлять диффузионными потоками на пластину, на поверхности которой происходит реакция.

Градиент приложенного магнитного поля предполагается достаточно большим по сравнению с индуцированным градиентом.

Литература

1. Гершуни Г.З., Жуховицкий Е.М. Конвективная устойчивость несжимаемой жидкости - М.: Наука, 1972. - 392 с.

2. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Электродинамика сплошных сред. - М.: Наука, 1982. - 624 с.

3. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Гидродинамика. - М.: Наука, 1988. - 736 с.

4. Левич В.Г. Физико-химическая гидродинамика. - М.: ГИФМЛ, 1959. - 700

Convection of mixtures in magnetic field

N.G. Taktarov

Equations of mixtures convection and convectional diffusion in a magnetic field had been obtained. The special cases had been examined including the problem solving of mixture convectional motion near vertical plate with the presence of heterogeneous chemical reaction.