УДК 519.644

НЕСТАЦИОНАРНАЯ МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ РАССЕЯНИЯ ПРИМЕСИ В МНОГОСЛОЙНОЙ АТМОСФЕРЕ

Семенчин Е.А.
Ставропольский государственный университет, Ставрополь

Предложена нестационарная математическая модель рассеяния примеси в трехслойной атмосфере (приземный, пограничный слои, слой свободной атмосферы). Приведены результаты исследования этой модели аналитическими методами в случае рассеяния легкой, сохраняющейся примеси при постоянной скорости ветра.

Процесс рассеяния примеси в турбулентной атмосфере описывается начально-граничной задачей [1-3]

$$\frac{\partial q}{\partial t} + u\frac{\partial q}{\partial x} - w\frac{\partial q}{\partial z} + aq = \frac{\partial}{\partial x}K_x\frac{\partial q}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y}K_y\frac{\partial q}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial z}K_z\frac{\partial q}{\partial z} + f, \quad (1)$$

$$t \in [t_0, T],$$

$$(x,y,z) \in R_+^3 = \{(x,y,z): x,y \in (-\infty,\infty), z \in [0,\infty)\},$$

$$q(t_0,x,y,z) = j(x,y,z), \quad (2)$$

$$\left\{K_z\frac{\partial q}{\partial z} + wq\right\}\bigg|_{z=0} = \{v_s q\}|_{z=0}, \quad (3)$$

$$q(t,x,y,z) \to 0, \; x^2+y^2+z^2 \to \infty. \quad (4)$$

Здесь $q = q(t,x,y,z)$ – функция, значения которой в каждый момент времени $t \in [t_0, T]$ в точках $(x,y,z) \in R_+^3$ совпадают со значениями осредненной концентрации примеси, u – скорость перемещения примеси (скорость ветра), направление которой совпадает с направлением оси 0x, w – скорость вертикального осаждения примеси, a – коэффициент, характеризующий изменения ее концентрации за счет различных превращений, K_x, K_y, K_z – коэффициенты турбулентного обмена соответственно вдоль осей 0x, 0y, 0z, $f = f(x,y,z)$ – функция, описывающая количество примеси, вырабатываемой в атмосферу источником в момент $t \in [t_0, T]$.

Задачу (1)-(4) следует рассматривать с уравнением неразрывности [1]:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0, \quad (5)$$

где u, v, w – компоненты вектора скорости перемещения примеси соответственно вдоль осей 0x, 0y, 0z.

Обычно полагают [1-3], что $u = u(z)$, $K_x = K_x(z)$, $K_y = K_y(z)$, $K_z = K_z(z)$ являются непрерывно дифференцируемыми функциями аргумента z, $z \in [0,\infty)$, $K_x(z) = K_y(z)$, $w = const$, $a = a(t)$ – непрерывная функция $t \in [t_0, T]$, $f = f(t,x,y,z) = QR(t,x,y,z)$, Q – мощность источника, $R(t,x,y,z)$ – функция, которая выражается через d-функцию Дирака, $j(x,y,z)$ – непрерывная функция аргументов x, y, z, $x,y \in (-\infty,\infty)$, $z \in [0,\infty)$, $v_s = const$. Если имеют место данные ограничения и декартова система координат сориентирована таким образом, что направление ветра совпадает с направлением оси 0x, то соотношение (5) выполняется тождественно. Поэтому в дальнейшем оно учитываться не будет.

Задача (1)-(4) представляет собой математическую модель рассеяния примеси в пространстве $R_+^3 = \{(x,y,z): x,y \in (-\infty,\infty), z \in [0,\infty)\}$ [1-3]. Такая модель неплохо описывает изменения концентрации примеси в атмосфере. Однако она не учитывает многослойность атмосферы. На самом деле в атмосфере принято выделять два слоя: тропосферу (до высоты 11 км от уровня моря) и стратосферу (простирающуюся по высоте от 11 до 40 км). В свою очередь в тропосфере выделяют три слоя: приземный, пограничный и верхний (слой свободной атмосферы) [4,5]. Рассеяние примеси в верхнем слое атмосферы и стратосфере проистекает примерно одинаково (по одним и тем же законам). Однако процесс рассеяния примеси в каждом из трех указанных слоев тропосферы имеет свои особенности [2], которые целесообразно учитывать в модели (1)-(4).

Стационарные математические модели диффузии примеси в многослойной атмосфере были впервые предложены и изучены численными методами в [6-9]. В данной работе эти модели обобщаются на нестационарный режим диффузии и изучаются аналитическими методами.

Разобьем пространство R_+^3 на три подпространства:

$$R_{+1}^3 = \{(x,y,z): x,y \in (-\infty,\infty), z \in [0,h_1)\},$$
$$R_{+2}^3 = \{(x,y,z): x,y \in (-\infty,\infty), z \in [h_1,h_2)\},$$
$$R_{+3}^3 = \{(x,y,z): x,y \in (-\infty,\infty), z \in [h_2,+\infty)\},$$
$$R_+^3 = R_{+1}^3 \mathbf{U} R_{+2}^3 \mathbf{U} R_{+3}^3,$$

где h_1 – высота приземного слоя атмосферы, h_2 – высота пограничного слоя. h_1, h_2 могут быть вычислены по формулам, приведенным в [2]. Предлагается нестационарная математическая модель рассеяния примеси в трехслойной атмосфере, представляющая собой совокупность трех задач:

$$\frac{\partial q_i}{\partial t} + u_i \frac{\partial q_i}{\partial x} - w_i \frac{\partial q_i}{\partial z} + a q_i = \frac{\partial}{\partial x} K_x^{(i)} \frac{\partial q_i}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} K_y^{(i)} \frac{\partial q_i}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial z} K_z^{(i)} \frac{\partial q_i}{\partial z} + d_{ik} f, \quad (6)$$

$$t \in [t_0, T],$$

$$q_i(t_0,x,y,z) = j(x,y,z), \quad (7)$$

$$\left\{K_z^{(1)} \frac{\partial q_1}{\partial z} + w_1 q_1\right\}\Bigg|_{z=0} = \{n_s q_1\}\big|_{z=0}, \quad (8)$$

$$q_i(t,x,y,z) \to 0, \ x^2+y^2+z^2 \to \infty, \quad (9)$$

$$q_2(t,x,y,z)\big|_{z=h_1} = q_1(t,x,y,z)\big|_{z=h_1}, \quad (10)$$

$$q_3(t,x,y,z)\big|_{z=h_2} = q_2(t,x,y,z)\big|_{z=h_2}, \quad (11)$$

$$i = 1,2,3, \ d_{ik} = \begin{cases} 1, & i = k, \\ 0, & i \neq k, k = 1,2,3. \end{cases}$$

Предполагается, что задачи (6)-(11) рассматриваются последовательно: вначале при $i = 1$, затем при $i = 2$, при $i = 3$.

Проведем исследование модели (6)-(11) аналитическими методами в случае:

$$\left.\begin{array}{l} u_1 = const, \ u_2 = const, \ u_3 = const, \\ w_i = 0, \ i = 1,2,3, \ a = 0 \ \text{(легкая, сохраняющаяся примесь),} \\ K_x^{(1)} = K_y^{(1)} = k_i u_i, \ k_i = const, \ i = 1,2,3, \\ K_z^{(1)} = k_0 z^n, \ k_0 = const > 0, \ n = const, \ 0 < n < 2, \\ K_z^{(2)} = const, \ K_z^{(3)} = const, \\ j(x,y,z) \neq 0 \ \text{при} \ (x,y,z) \in R_{+1}^3, \\ j(x,y,z) = 0 \ \text{при} \ (x,y,z) \in R_{+2}^3 \mathbf{U} R_{+3}^3, \\ d_{i1} = \begin{cases} 1, & i = 1, \\ 0, & i = 2,3 \end{cases} \ \text{(источник расположен} \end{array}\right\} \quad (12)$$

в приземном слое).

При $i = 1$ имеем задачу:

$$\frac{\partial q_1}{\partial t} + u_1 \frac{\partial q_1}{\partial x} = k_1 u_1 \frac{\partial^2 q_1}{\partial x^2} + k_1 u_1 \frac{\partial^2 q_1}{\partial y^2} + k_0 \frac{\partial}{\partial z} z^n \frac{\partial q_1}{\partial z} + f, \quad (13)$$

$$0 < n < 2, \ t \in [t_0, T],$$

$$q_1(t_0,x,y,z) = j(x,y,z), \quad (14)$$

$$k_0 z^n \frac{\partial q_1}{\partial z}\bigg|_{z=0} = 0, \quad (15)$$

$$q_1(t,x,y,z) \to \infty, \ x^2+y^2+z^2 \to \infty, \ z \geq 0. \quad (16)$$

Решение задачи (13)-(16) приведено в [3]. Оно имеет вид:

$$q_1(t,x,y,z) = \int_{t_0}^{t} dt \int_{-\infty}^{\infty} q^{(1)}(t,x,t,x)dx \int_{-\infty}^{\infty} q^{(2)}(t,h,t,y)dh \times \int_{0}^{\infty} q^{(3)}(t,q,t,z) f(t,x,h,q) dq + \int_{-\infty}^{\infty} q^{(1)}(t_0,x,t,x)dx \int_{-\infty}^{\infty} q^{(2)}(t_0,h,t,y)dh \times \int_{-\infty}^{\infty} q^{(3)}(t_0,q,t,z) j(x,h,q) dq, \quad (17)$$

$$q^{(1)}(t,x,t,x) = \frac{1}{2\sqrt{p k_1 u_1 (t-t)}} \exp\left\{-\frac{[x - x - u_1(t-t)]^2}{4 k_1 u_1 (t-t)}\right\}, \quad (18)$$

$$q^{(2)}(t,h,t,y) = \frac{1}{2\sqrt{p k_1 u_1 (t-t)}} \exp\left\{-\frac{(y-h)^2}{4 k_1 u_1 (t-t)}\right\}, \quad (19)$$

$$q_3(t,q,t,z) = \frac{1}{(2-n)k_0(t-t)q^{n-1}} \left(\frac{z}{q}\right)^{\frac{1-n}{2}} \times \exp\left\{-\frac{z^{2-n}+q^{2-n}}{(2-n)^2 k_0 (t-t)}\right\} I_{-\frac{1-n}{2-n}}\left\{\frac{2(zq)^{\frac{2-n}{2}}}{(2-n)^2 k_0 (t-t)}\right\}, \quad (20)$$

$I_{-b}(a)$ – функция Бесселя мнимого аргумента.

При $i=2$ имеем задачу:

$$\frac{\partial q_2}{\partial t}+u_2\frac{\partial q_2}{\partial x}= =k_2u_2\frac{\partial^2 q_2}{\partial x^2}+k_2u_2\frac{\partial^2 q_2}{\partial y^2}+K_z^{(2)}\frac{\partial^2 q_2}{\partial z^2}, \qquad (21)$$

$$q_2(t_0,x,y,z)=0, \qquad (22)$$

$$q_2(t,x,y,z)\to 0,\ x^2+y^2+z^2\to\infty, \qquad (23)$$

$$q_2(t,x,y,z)\big|_{z=h_1}=q_1(t,x,y,z)\big|_{z=h_1}. \qquad (24)$$

Преобразуем данную задачу, положив

$$r(t,x,y,z)=q_2(t,x,y,z)-q_1(t,x,y,h_1). \qquad (25)$$

Учитывая (24), (25), будем иметь:

$$\frac{\partial r}{\partial t}+u_2\frac{\partial r}{\partial x}= =k_2u_2\frac{\partial^2 r}{\partial x^2}+k_2u_2\frac{\partial^2 r}{\partial y^2}+K_z^{(2)}\frac{\partial^2 r}{\partial z^2}+f_2, \qquad (26)$$

$$f_2=f_2(t,x,y,h_1)= =\left\{\frac{\partial q_1}{\partial t}+u_2\frac{\partial q_1}{\partial x}-k_2u_2\frac{\partial^2 q_1}{\partial x^2}-k_2u_2\frac{\partial^2 q_1}{\partial y^2}\right\}\Bigg|_{z=h_1}, \qquad (27)$$

$$r(t_0,x,y,z)=0, \qquad (28)$$

$$r(t,x,y,z)\to 0,\ x^2+y^2+z^2\to\infty, \qquad (29)$$

$$r(t,x,y,z)\big|_{z=h_1}=0. \qquad (30)$$

Непосредственным подсчетом можно убедиться, что решение задачи (26)-(30) имеет вид [3]:

$$r(t,x,y,z)=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{h_1}^{\infty}p(t,x,h,q;t,x,y,z)\times \times f_2(t,x,h,h_1)d(q-h_1)dxdhdq, \qquad (31)$$

где

$$p(t,x,h,q;t,x,y,z)=\frac{1}{2k_2u_2\sqrt{p(t-t)K_z^{(2)}}}\times$$

$$\times\exp\left\{-\frac{(x-x-u_2(t-t))^2}{4k_2u_2(t-t)}-\frac{(y-h)^2}{4k_2u_2(t-t)}\right\}\times$$

$$\times\left[\exp\left\{-\frac{(z-2q)^2}{4K_z^{(2)}(t-t)}\right\}-\exp\left\{-\frac{z^2}{4K_z^{(2)}(t-t)}\right\}\right], \qquad (32)$$

Учитывая (25) и воспользовавшись свойствами d-функции, найдем решение задачи (21)-(24):

$$q_2(t,x,y,z)=q_1(t,x,y,h_1)+$$

$$+\frac{1}{2}\int_{t_0}^{t}dt\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}p(t,x,h,h_1;t,x,y,z)\times$$

$$\times f_2(t,x,h,h_1)dxdh, \qquad (33)$$

p, f_2 заданы соответственно выражениями (32), (27).

При $i=3$ имеем задачу

$$\frac{\partial q_3}{\partial t}+u_3\frac{\partial q_3}{\partial x}= =k_3u_3\frac{\partial^2 q_3}{\partial x^2}+k_3u_3\frac{\partial^2 q_3}{\partial y^2}+K_z^{(3)}\frac{\partial^2 q_3}{\partial z^2},$$

$$q_3(t_0,x,y,z)=0,$$

$$q_3(t,x,y,z)\to 0,\ x^2+y^2+z^2\to\infty,$$

$$q_3(t,x,y,z)\big|_{z=h_2}=q_2(t,x,y,z)\big|_{z=h_2}.$$

Решение этой задачи строится точно так же, как и решение задачи (21)-(24) и имеет вид:

$$q_3(t,x,y,z)=q_2(t,x,y,h_2)+$$

$$+\frac{1}{2}\int_{t_0}^{t}dt\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}p(t,x,h,h_2;t,x,y,z)\times$$

$$\times f_3(t,x,h,h_2)dxdh,$$

$$p(t,x,h,q;t,x,y,z)=\frac{1}{2k_3u_3\sqrt{p(t-t)k_z^{(3)}}}\times$$

$$\times\exp\left\{-\frac{(x-x-u_3(t-t))^2}{4k_3u_3(t-t)}-\frac{(y-h)^2}{4k_3u_3(t-t)}\right\}\times$$

$$\times\left[\exp\left\{-\frac{(z-2q)^2}{4K_z^{(3)}(t-t)}\right\}-\exp\left\{-\frac{z^2}{4K_z^{(3)}(t-t)}\right\}\right],$$

$$f_3(t,x,y,h_2)= =\left\{\frac{\partial q_2}{\partial t}+u_3\frac{\partial q_2}{\partial x}-k_3u_3\frac{\partial^2 q_2}{\partial x^2}-k_3u_3\frac{\partial^2 q_2}{\partial y^2}\right\}\Bigg|_{z=h_2}.$$

Литература

1. Марчук Г.И. Математическое моделирование в проблеме окружающей среды. – М.: Наука, 1982.-320 с.
2. Берлянд М.Е. Современные проблемы атмосферной диффузии и загрязнения атмосферы. – Л.:Гидрометеоиздат, 1975.-448 с.
3. Семенчин Е.А. Аналитические решения краевых задач в математической модели атмосферной диффузии. – Ставрополь: изд-во СКИУУ, 1993.-142с.

4. Матвеев Л.Г. Курс общей метеорологии. Физика атмосферы. – Л.: Гидромеоиздат, 1984. – 752 с.

5. Рихтер Л.А. Тепловые электростанции и защита атмосферы. – М.: Энергия, 1975.–312 с.

6. Бабешко В.А., Гладской И.Б., Зарецкая М.В., Кособуцкая Е.В. Исследование распространения загрязняющих веществ от точечного источника в стратифицированной атмосфере/ Тез. докл. 2-й международной конф. «Современные проблемы механики сплошной среды». Ростов-на-Дону, 19-20 сент. 1996. С. 10-13.

7. Бабешко В.А., Зарецкая М.В., Кособуцкая Е.В. Об одной модели распространения загрязняющих веществ по глубине водного потока// Доклады РАН. 1994. Т.337. №5 С. 660-661.

8. Бабешко В.А., Гладской И.Б., Зарецкая М.В., Кособуцкая Е.В. К проблеме оценки выбросов загрязняющих веществ источниками различных типов// Доклады РАН. 1995. Т.342. №6 С. 835-838.

9. Кособуцкая Е.В. Некоторые модели распространения опасных загрязняющих веществ в стационарных условиях. Дис. на соиск. ученой степени канд. физ.-мат. наук. – Краснодар, 1998. – 124 с.

Non-stationary mathematical model of diffusing an admixture in multi-tiered atmosphere

E.A. Semenchin

Offered non-stationary mathematical model of diffusing an admixture in three-tiered atmosphere (near ground, frontier layers and free atmosphere layer). Brought results of studies this models by analytical methods in the event of diffusing light and saving admixtures under constant velocities winds.